Bestimme eine Parametergleichung für die Gerade, die durch die Punkte $A(1|-1|2)$ und $B(0|4|-5)$ geht. Gib vier mögliche Gleichungen für dieselbe Gerade an.

m13v0046

In diesem Video wird die Punktprobe behandelt, mit der man untersucht, ob ein Punkt auf der Geraden liegt, sowie weitere verwandte Aufgabentypen.

Prüfe in a) und b), ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};\ \ P(8|-4|0)$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix};\ \ P(-1|7|0)$

c) Prüfe, ob die Punkte $A(-1|2|0), B(3|3|3)$ und $C(1|-5|2)$ auf einer Geraden liegen.

d) Gegeben sind die Punkte $P(5|-6|4),\ A(1|2|3),\ B(7|-10|4{,}5)$. Liegt der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$?

m13v0047

Überprüfe mit der im Video vorgestellten Vektor-Vergleichsmethode, ob die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen.

a) $A(1|2|-3),\ B(1|1|-5),\ C(1|4|1)$

b) $A(3|1|1),\ B(3|-1|2),\ C(3|-5|5)$

Überprüfe mit der Vektor-Vergleichsmethode, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

c) c) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ P(0|5|-1)$

d) d) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix};\ \ P(-1|1|2)$

m13v0539

Gegeben ist die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem ein,

b) Bestimme rechnerisch zwei beliebige Punkte der Geraden, die man in die Zeichnung von a) eintragen kann.

c) Zeichne den Punkt $Q(-2|1|3)$ in das Koordinatensystem von a). Überprüfe rechnerisch, ob der Punkt Q auf der Geraden g liegt. Was fällt auf?

m13v0388

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h:

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

m13v0051

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

m13v0052

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h. Falls es einen Schnittpunkt gibt, bestimme dessen Koordinaten.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

m13v0053

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

m13v0054

In einem früheren Video (m13v0049) hatten wir einen Untersuchungsalgorithmus kennengelernt, wie man die gegenseitige Lage zweier Geraden untersuchen kann. In diesem Video lernen wir eine alternative Untersuchungsmethode kennen.

- Beschreibe den Untersuchungsalgorithmus der alternativen Methode.
- In welchen Fällen, liefert die alternative Methode in einem einzigen Schritt sofort eine Aussage über die gegenseitige Lage zweier Geraden? Für welchen Fall, ist ein weiterer Untersuchungsschritt notwendig?

Untersuche mit Hilfe dieser Methode die gegenseitige Lage folgender Geradenpaare:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

m13v0140

☹ 😐 ☺

Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ und die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für welchen Wert von a liegt der Punkt $P(-18|5|-5)$ auf g_a?

a) Für welchen Wert von a schneiden sich g_a und h und wo liegt der Schnittpunkt?
b) Welche besondere Lage hat g_a für $a = 0$?
c) Für welchen Wert von a schneidet g_a die x_2-Achse und wo liegt der Schnittpunkt?

m13v0269

☹ 😐 ☺

Bestimme a und b so, dass die beiden Geraden g und h parallel zueinander sind.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2b \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

m13v0264

☹ 😐 ☺

Bestimme a so, dass sich die Geraden g und h schneiden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ 2\boldsymbol{a} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

m13v0268

☹ 😐 ☺

Durch die beiden Punkte $\mathrm{A}(\mathrm{a}+2|2|1-\mathrm{a})$ und $\mathrm{B}(\mathrm{a}-3|-1|-\mathrm{a})$ wird eine Geradenschar festgelegt.

a) Bestimme eine Parametergleichung der Geradenschar.
b) Ist dies eine Schar paralleler Geraden oder eine Schar mit gemeinsamem Stützpunkt? Begründe.
c) Überprüfe, ob die Punkte $P(-5|-1|2)$ und $Q(0|-4|-4)$ auf einer Geraden der Geradenschar liegen. Falls ja, gib die Gleichung dieser Geraden an.

m13v0426

☹ 😐 ☺

Gegeben ist die Gerade $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Gib die Koordinaten des Schnittpunktes von g mit der x_1x_3-Ebene in Abhängigkeit von a an.

b) Für einen bestimmten Wert von a schneidet die Gerade g die x_2-Achse. Bestimme diesen Wert von a, und bestimme den x_2-Achsenschnittpunkt.

m13v0373

☹ 😐 ☺

a) Gib eine Gleichung für die Gerade an, die durch den Punkt P(1|-2|3) geht und welche die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat.

b) Gib drei verschiedene Punkte an, die auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen.

c) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gib drei weitere mögliche Gleichungen für dieselbe Gerade an.

m13v0056

a) Welche Aussage trifft jeweils für die Gleichung g zu?

$$g: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

[ ] g ist keine Geradengleichung
[ ] g ist eine Ursprungsgerade
[ ] g liegt auf der x_2-Achse
[ ] g liegt auf der x_1x_3-Ebene
[ ] g besitzt den Punkt $P(4|0|-3)$ als einen Geradenpunkt
[ ] g besitzt (0|0|0) als Geradenpunkt

b) Geradenkonstruktionsaufgaben:

b1) Gib eine Gleichung für eine Gerade an, die durch den Punkt $P(4|2|-1)$ geht und parallel zur x_3-Achse verläuft.

b2) Formuliere die Gleichung einer Ursprungsgeraden, die durch den Punkt $P(2|3|-4)$ geht.

b3) Gib eine mögliche Gleichung für eine Gerade an, die auf der x_2-Achse liegt.

b4) Gib eine mögliche Gleichung für eine Winkelhalbierende der x_1x_2-Ebene an.

m13v0057

Bei den folgenden Parametergleichungen der Geraden g und h lässt sich ohne Rechnung erkennen, welchen Schnittpunkt die Geraden haben bzw. ob sie keinen Schnittpunkt haben. Untersuche und begründe!

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

m13v0461

Gib mögliche Gleichungen – sofern möglich – für nicht-identische Geraden g und h an, die …

a) … parallel zur x_2-Achse verlaufen und nicht durch den Ursprung gehen.

b) … parallel zur x_2-Achse verlaufen und durch den Ursprung gehen (der gewählte Stützvektor soll nicht der Nullvektor sein).

c) … parallel zur x_1x_3-Ebene verlaufen und nicht durch den Ursprung gehen.

d) … parallel zur x_1x_3-Ebene verlaufen und durch den Ursprung gehen (der gewählte Stützvektor soll nicht der Nullvektor sein).

e) … keine besondere Lage im Koordinatensystem haben und auch nicht durch den Ursprung gehen.

f) … Ursprungsgeraden sind, aber keine Parallelität zu einer Koordinatenachse oder –ebene haben und deren Stützvektor nicht der Nullvektor sein soll.

Bei welcher Aufgabe müssen die Geraden g und h immer identisch sein?

m13v0515

☹ 😐 ☺

Bestimme die Spurpunkte der Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

m13v0048

☹ 😐 ☺

Nachfolgende Geraden g, h und k können als Geraden im R2 entweder in der „klassischen“ Hauptform ($y = mx + b$), in der Koordinatenform ($ax_1 + bx_2 = c$) oder in der Parameterform ($\vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v}$) angegeben werden.

Wandle die angegebene Form in die beiden anderen Darstellungsformen um.

a) $g\colon\ y = -2x + 3$

b) $h\colon\ -x_1 + 3x_2 = 6$

c) $k\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

m13v0387

☹ 😐 ☺

Gegeben sind die Punkte $A(1|4|2)$, $B(1|7|8)$ und $C(1|3|0)$.

a) Zeige, dass C auf der Geraden AB liegt und überprüfe, ob C auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt oder nicht.

b) Auf der Strecke $\overline{AB}$ gibt es einen Punkt D, der von A doppelt so weit entfernt ist wie von B. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes D.

m13v0376

☹ 😐 ☺

Diese Fragen dienen zur Nachbereitung des Lektionsvideos über die Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier, in Parameterform gegebener Geraden im Raum.

- Welche Lagebeziehungen können zwei Geraden im Raum zueinander haben?
- Veranschauliche die Lagemöglichkeiten in Form eines Erklärbildchens.
- Schreibe den Untersuchungsalgorithmus auf, mit denen sich die gegenseitige Lage zweier Geraden untersuchen lässt.

Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

m13v0049