☐ *Diese Fragen und Aufgaben dienen zur Nachbereitung des Lektionsvideos über die Herleitung des Skalarprodukts.*

Im Video wird die Kosinusformel hergeleitet, mit der man den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen kann. Die Zielformel soll so aussehen, dass man nur die beiden Vektoren braucht und man kann damit sofort den eingeschossenen Winkel bestimmen.
Die Herleitung geht von der geometrischen Beziehung zwischen Seitenlängen und Winkel in einem Dreieck aus, die über den Kosinussatz gegeben ist. Vollziehe die einzelnen Schritte der Herleitung schriftlich nach und kommentieren ausführlich, was du machst und warum.

**m13v0369**

Ein Lektionsvideo eher für diejenigen, die wissen wollen, wie die Kosinusformel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren hergeleitet wird.

☐ *Diese Fragen und Aufgaben dienen zur Nachbereitung des Lektionsvideos über das Skalarprodukt und das Orthogonalitätskriterium.*

- Zeige bei einer der nachfolgenden Rechnungen durch farbliche Kennzeichnung, wie das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet.
- Wie lautet das Orthogonalitätskriterium?
- Warum heißt das Skalarprodukt „Skalarprodukt"?

Berechne jeweils das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und entscheide, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind (also senkrecht zueinander stehen):

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ein weiteres Beispiel für eine typische Grundlagenaufgabe zum Skalarprodukt:

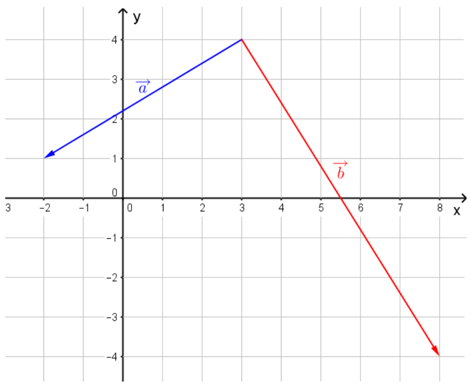
c) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 6 \end{pmatrix}$. Für welchen Wert des Parameters $a$ sind die beiden Vektoren orthogonal?

**m13v0220**

Die wohl wichtigste Anwendung des Skalarproduktes ist es, schnell zu prüfen, ob zwei Vektoren senkrecht (orthogonal) zueinander stehen. In diesem Video wird gezeigt, wie das geht.

☐ Überprüfe mithilfe des Skalarprodukts:

Stehen die beiden dargestellten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander?




**m13v0642**

Eine beliebte Einstiegsaufgabe zur Prüfung von Vektoren auf Orthogonalität.

☐ Wie muss $a$ gewählt werden, damit folgende Gleichungen gelten?

a) $\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = -21$

b) $\begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = 0$

c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a^2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -20$

**m13v0663**

Ein beliebter Aufgabentyp: Gleichung mit Skalarprodukt, die eine Variable enthält, ist zu lösen.

---

☐ Wie lautet die Kosinusformel zur Berechnung des Winkels zweier Vektoren?

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Welche Aussagen kann man über den von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $b$ eingeschlossenen Winkel machen, wenn das Skalarprodukt:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

beträgt?

Zwei Vektoren schließen in der Regel zwei Winkel ein. Welchen Winkel gibt man zur Beschreibung des eingeschlossenen Winkels vereinbarungsgemäß immer an?

**m13v0221**

Ein Video zur Anwendung der Kosinusformel des Skalarprodukts zur Bestimmung des Winkels zwischen Vektoren. Dabei werden auch Eigenschaften des Skalarprodukts besprochen.

---

☐ Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1|1|1)$, $B(4|5|0)$ und $C(1|3|4)$.

Bestimme die Innenwinkel dieses Dreiecks.

**m13v0516**

Beliebter Aufgabentyp

---

☐ *In diesem Video wird ein Trick vorgemacht, wie man für einen gegebenen Vektor ganz schnell irgendeinen dazu senkrechten Vektor bestimmen kann – und das ganz ohne Rechnen. Die Anwendbarkeit dieses Tricks hängt natürlich vom Aufgabentypus ab.*

- Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

  Formuliere schriftlich, wie man den Trick anwendet, und bestimme mit dieser Methode drei weitere Vektoren, die senkrecht zu $\vec{a}$ stehen. Überprüfe dein Ergebnis, indem du bestätigst, dass das Skalarprodukt Null ergibt.

- Eine mögliche Anwendung wird in einem Beispiel gezeigt.

  Bestimme irgendeine Gerade h, welche die Gerade g senkrecht schneidet.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**m13v0158**

Ein cooler Trick zur Bestimmung eines Vektors, der senkrecht zu einem gegebenen Vektor steht. Kann sehr hilfreich sein

☐ *Diese Fragen und Aufgaben dienen zur Nachbereitung des Lektionsvideos über die „Skalarprodukt-Formel“ zur Berechnung der Länge eines Vektors.*

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Bestimme das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{a}$ und den Betrag des Vektors $|\vec{a}|$.

Welche Beziehung ergibt sich zwischen $\vec{a}^2$ und $|\vec{a}|$ ?

Bestimme mithilfe des Skalarproduktes die Längen der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Erkläre, warum $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist.

**m13v0432**

Über den Zusammenhang zwischen Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst und Länge des Vektors.

---

☐ Folgende Informationen sind über die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben:

Es ist $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ und der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt 60°.

Berechne den Wert von $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$.

**m13v0643**

Vernetzen von Wissen: Wie gut kennst du den Zusammenhang von Länge von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren? Eine schon etwas anspruchsvollere Aufgabe.

---

☐

a) Zeichne die Punkte $A(2|-3|6)$ und $B(-3|4|1)$ in ein Koordinatensystem.

b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes C auf der $x_2$-Achse so, dass bei C ein rechter Winkel im Dreieck ABC entsteht.

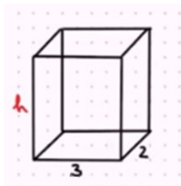
**m13v0296**

Eine typische Aufgabe, bei denen Punkte für ein Dreieck so zu bestimmen sind, dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht.

---

☐ Ein Quader hat die Grundflächenmaße 2×3.

Wie muss die Höhe h gewählt werden, damit sich die Raumdiagonalen senkrecht schneiden?




**m13v0505**

Vernetzen von Wissen

---

☐ Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \boldsymbol{R}$, sowie eine weitere Gerade h, die parallel zu g und durch den Punkt $A(1|2|3)$ verläuft.

Der Punkt B liegt auf der Geraden g so, dass die Gerade durch A und B und die Gerade h senkrecht zueinander stehen.

a) Bestimme die Koordinaten des Punktes B.

b) Berechne den Abstand der beiden Geraden g und h.

**m13v0581**

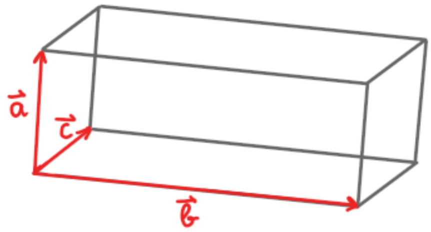
Anwendung des Skalarprodukts im Kontext von Geraden

☐ Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ spannen einen Körper – ein sogenanntes Spat – auf, wie in der Abbildung gezeigt.

a) Zeige, dass dieses Spat ein Quader ist.

b) Bestimme das Volumen des Quaders.




**m13v0564**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Untersuchung von geometrischen Körpern

---

☐ *Diese Fragen und Aufgaben dienen zur Nachbereitung des Lektionsvideos, in der man für ein Dreieck die Höhe über einer Seite und den entsprechenden Fußpunkt berechnen kann.*

Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1|2|2)$, $B(-2|11|8)$ und $C(-1|4|5)$.

Bestimme den Fußpunkt $F_{AB}$ der Höhe über der Grundseite $\overline{AB}$, und berechne auch die entsprechende Höhe.

Falls du Schwierigkeiten beim Lösen hast, vollziehe nach, welche Beziehungen und Bedingungen zwischen geeigneten Vektoren formuliert werden, und kommentiere den Lösungsweg ausführlich.

**m13v0437**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Untersuchung eines Dreiecks

---

☐ Gegeben sind die Punkte $A(3|-1|2)$, $C(8|2|8)$ und $B(7|b|3)$ mit $b \in \boldsymbol{R}$.

Der Punkt B hat von A und C denselben Abstand.

a) Bestimme b.

b) Ermittle die Koordinaten des Eckpunktes D, der das Viereck ABCD zu einer Raute ergänzt. Zeige, dass ABCD kein Quadrat ist.

**m13v0595**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Konstruktion eines Dreiecks bzw. Vierecks

---

☐ Gegeben sind die Punkte $A(2|5|1)$, $B(-2|1|-3)$ und $C(-1|a|0)$.

a) Bestimme den Wert von $a$ so, dass sich das Dreieck ABC zu einem Rechteck ABCD ergänzen lässt.

b) Bestimme die Koordinaten des Punktes D.

**m13v0620**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Konstruktion eines Vierecks

---

☐ Das Dreieck ABC hat die Eckpunkte $A(k|8|5)$, $B(1|7|3)$ und $C(-2|10|6)$. Bestimme alle Werte von $k$, sodass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

**m13v0641**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Untersuchung eines Dreiecks

☐ Für $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bilden die Punkte $A(\,2\,|\,1\,|\,-2\,)$, $B_t(\,2\,|\,-t+1\,|\,2t-2)$ und $C(\,2\,|\,9\,|\,2\,)$ ein Dreieck.

a) Zeige, dass jedes dieser Dreiecke bei $A$ einen rechten Winkel besitzt.

b) Bestimme alle Werte von $t$, für die das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

**m13v0609**

Anwendung des Skalarprodukts bei der Untersuchung und Konstruktion eines Dreiecks

☐ Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Punkten $A(-1|3|2)$, $B(2|-1|2)$ und $C(3|6|2)$.

a) Begründe, warum das Dreieck in der Ebene mit der Gleichung $z=2$ liegt.

b) Weise nach, dass das Dreieck im Punkt A rechtwinklig ist und einen Flächeninhalt von 12,5 FE besitzt.

c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes S so, dass das Volumen der Pyramide ABCS 50 VE beträgt.

**m13v0623**

Vernetzen von Wissen