☐ *Hier einige Verständnisfragen und Übungen zum Lektionsvideo „Lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren lösen“:*

m13v0232

Verständnisfragen / Aufgaben:

- Warum spricht man von einem Linearen Gleichungs<u>system</u>? Ist eine Lösung, die *eine* Gleichung des LGS erfüllt, gleichzeitig auch die Lösung aller Gleichungen?
- Eine systematische Methode zum Lösen eines LGS ist das Gauß-Verfahren, bei dem man durch Umformungen versucht, das LGS in die sogenannte Stufenform (oder Dreiecksform) zu bringen. Welche Rechenoperationen darf man anwenden, um auf das Erreichen der Stufenform (Dreiecksform) hinzuarbeiten? [3:38]

1.	*Man darf,* ____ ____
2.	*Man darf,* ____ ____
3.	*Man darf,* ____ ____

- Im Video wird vorgemacht, wie man das LGS

$$\begin{array}{rl} \text{I} & 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ \text{III} & 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 16 \end{array}$$

  durch den Gauß-Algorithmus in die Stufenform bringt [3:38]. Vollziehe die Schritte einzeln schriftlich nach und löse zum Schluss die Dreiecksform von unten nach oben auf, um die Lösung des LGS zu bestimmen.
- Zusatzaufgabe: Der im Video vorgemachte Lösungsweg ist nur *eine* Möglichkeit. Versuche für dieselbe Aufgabe einen anderen Gauß-Algorithmus anzuwenden und bestätige damit, dass man dabei dieselbe Lösungsmenge erhält.

☐ *Hier einige Verständnisfragen und Übungen zum Lektionsvideo „LGS übersichtlich Lösen mit erweiterter Koeffizientenmatrix“:*

m13v0233

Im Video wird die Lösung des folgenden LGS vorgemacht.

$$\begin{array}{rl} \text{I} & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 = -\frac{1}{6} \\ \text{II} & 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -3 \\ \text{III} & 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \end{array}$$

- Übertrage das LGS zunächst in die Schreibweise der erweiterten Koeffizientenmatrix.
- Vollziehe die Lösungsmethode Schritt für Schritt schriftlich nach.
- Zusatzaufgabe: Versuche das LGS über einen anderen Rechenweg zu lösen.

<u>Hinweis/Korrektur:</u> Im Video wurde vergessen, bei der Lösungsmenge, $\mathbb{L} = \{(-2; 1; 0)\}$, die runde Klammer einzufügen, die anzeigt, dass die Lösung ein Zahlen**tripel** ist.

☐ *Hier einige Verständnisfragen und Übungen zum Lektionsvideo „Lösungsmenge Lineare Gleichungssysteme – eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen“:*

Ob eine LGS eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, hängt davon ab, wie das LGS aussieht, wenn man es mit dem Gauß-Algorithmus auf die Stufenform gebracht hat.

- Woran erkennt man, ob das LGS eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat? [7:25]
- Unterziehe die folgenden drei Beispiel-LGS des Gauß-Verfahren und bestimme, ob das jeweilige LGS eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

Beispiel 1 [0:37]	Beispiel 2 [2:00]	Beispiel 3 [4:38]
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 6 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 16 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 4 & 3 & -2 & -5 \\ 4 & 1 & -1 & -8 \\ 8 & 8 & -5 & -6 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 12 & 1 \\ 3 & -11 & 11 & 12 \end{array}\right)$

m13v0234

☐ *Hier einige Verständnisfragen und Übungen zum Lektionsvideo „Lineare Gleichungssysteme: Lösungsmenge bei unendlich vielen Lösungen angeben“:*

Im letzten Video m13v0234 haben wir gezeigt, dass das LGS

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ \mathrm{II} & 2x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 1 \\ \mathrm{III} & 3x_1 - 11x_2 + 11x_3 = 12 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen hat. Aber wir hatten in dem Video noch nicht angegeben, wie sich die unendlich große Lösungsmenge ausdrücken lässt. Darum geht es in diesem Video.

- Falls du es noch nicht bei der Aufgabe **m13v0234** gemacht hast, weise zunächst nach, dass das LGS unendlich viele Lösungen hat.
- Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens auf das obige LGS wird die letzte Zeile zu einer "$0 = 0$"-Zeile und fällt daher weg. Das auf zwei Zeilen „geschrumpfte“ LGS enthält nun als letzte Zeile zwei Unbekannte, die voneinander abhängen. Um die unendlich große Lösungsmenge angeben zu können, ersetzt man eine der Unbekannten durch einen Parameter und drückt die übrigen Variablen in Abhängigkeit von diesem Parameter aus. Folge dem im Video gezeigten Verfahren Schritt für Schritt, um schließlich die Lösungsmenge in Abhängigkeit eines Parameters zu bestimmen.

Hinweis/Korrektur: Im Video wurde vergessen, bei der Lösungsmenge die runde Klammer einzufügen. Richtig geschrieben lautet die Lösung $\mathbb{L} = \{(-11t - 7; -2t - 3; t)\}$. Durch die runde Klammer wird hervorgehoben, dass die Lösung aus einer Menge von Zahlentripeln besteht.

- *Bestimme für die unendlich große Lösungsmenge* $\mathbb{L} = \{(-11t - 7; -2t - 3; t)\}$ die speziellen Lösungen, die sich für $t = 1$ oder $t = 5$ ergeben.

m13v0251

☐ *Hier einige Verständnisfragen und Übungen zum Lektionsvideo „Gauß-Jordan-Verfahren zum Lösen von Lineare Gleichungssystemen":*

Im Video wird vorgemacht, wie man dieses LGS:

$$\begin{array}{rl} \text{I} & x+2y+3z=-6 \\ \text{II} & 2x-\ y+\ z=-7 \\ \text{III} & x \qquad\ \ -3z=8 \end{array}$$

oder als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

durch Anwenden des Gauß-Jordan-Verfahrens auf dieses Format bringt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{array}\right)$$

- Vollziehe die Prozedur des Verfahrens schriftlich Schritt für Schritt nach.

m13v0479

☐ Konstruiere ein LGS, bestehend aus drei Zeilen mit jeweils drei Variablen, welches $\mathbb{L}=\{(-2;\ 1;\ 3)\}$ als Lösungsmenge hat. In jeder Zeile sollen alle Variablen auftreten (d.h. deren Koeffizienten sollen ungleich null sein). Erläutere dein Vorgehen bei der Konstruktion des LGS.

m13v0411

☐ Konstruiere jeweils ein LGS, bestehend aus drei Zeilen mit jeweils drei Variablen, welches

a) $\mathbb{L}=\{(0;\ 0;\ 0)\}$ als Lösungsmenge hat.

b) keine Lösung hat.

Hinweis: In jeder Zeile sollen alle drei Variablen (mit Koeffizienten ungleich null) vorkommen.

m13v0412

☐ Gib eine 3×2-Matrix $\boldsymbol{A}$ an, in der kein Element 0 ist, sowie Vektoren $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, sodass

- das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$ eindeutig lösbar ist
- und das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\cdot\vec{x}=\vec{c}$ keine Lösung hat.

m13v0714

☐ a) Gib ein Lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen x_1, x_2 und x_3 an, das folgende Lösungsmenge hat:

$\mathbb{L}=\{(2+r|4-3r|r)\}$ mit $r\epsilon\boldsymbol{R}$

Das aufgestellte LGS soll drei Zeilen haben, wobei in jeder Zeile alle drei Variablen vorkommen sollen (mit Koeffizienten ungleich null).

b) Gib eine mögliche Lösung an für $r=1$ und überprüfe die Lösung anhand des aufgestellten LGS.

m13v0560

☐ Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen und drei Unbekannten ist gegeben, wobei die Lösungstripel $(1;\ 0;\ -2)$ und $(4;\ 1;\ -2)$ bekannt sind.

a) Bestimme die Lösungsmenge des LGS.

b) Formuliere ein mögliches LGS mit dieser Charakteristik. In diesem LGS sollen alle Koeffizienten der Variablen ungleich null sein.

c) Bestimme ein weiteres Lösungstripel des Gleichungssystems.

m13v0749

☐

a) Konstruiere ein lösbares Lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

b) Füge dem LGS aus a) eine dritte Gleichung hinzu, sodass die Lösungsmenge des neuen LGS mit der des alten LGS übereinstimmt. Kontrolliere die Lösungsmenge deines LGS mit dem GTR.

c) Füge dem LGS aus a) eine dritte Gleichung hinzu, sodass die Lösungsmenge des neuen LGS genau eine Lösung hat.

d) Füge dem LGS aus a) eine dritte Gleichung hinzu, sodass die Lösungsmenge des neuen LGS leer ist.

m13v0748

☐

Bestimme die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit vom Parameter r.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_1 &= -7r \\ x_2 + 2x_3 &= 1 + 4r \\ 3x_1 - 2x_2 + 22x_3 &= 1 + 47r \end{aligned}$$

m13v0265

☐

Bestimme die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit vom Parameter r.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_1 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 7 - r \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 + r \end{aligned}$$

m13v0266

☐

Bestimme die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von a.

Für welchen Wert von a hat das LGS eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} x + 2y &= -a \\ 2x + (2 + a)y &= -a - 2 \end{aligned}$$

m13v0430

☐

Leon und Matilda haben die Lösungsmenge des folgenden LGS bestimmt:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 7x_2 - 8x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Leon ermittelte als Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_1 = \{(-11t - 7\,;\, -2t - 3\,;\, t) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$$

Matilda berechnete die folgende Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_2 = \{(9{,}5 + 5{,}5r\,;\, r\,;\, -0{,}5r - 1{,}5) \mid r \in \boldsymbol{R}\}$$

Beide stimmen darin überein, dass das LGS unendlich viele Lösungen hat, aber die Ergebnisse sehen unterschiedlich aus. Zeige, dass beide dennoch recht haben!

m13v0423

☐

Untersucht wird die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems (LGS) in Abhängigkeit vom Parameter $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + px_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

a) Für welchen Wert von p hat das LGS unendlich viele Lösungen?

b) Wie viele Lösungen hat das LGS für $p = 3$?

c) Begründe, dass es keinen Wert von p gibt, für den das LGS genau eine Lösung hat.

m13v0480

☐ Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= 5 \\ 2x_1 - \quad x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 16 \end{aligned}$$

a) Zeige, dass das LGS die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2;\ -3; 1)\}$ hat.

b) Füge eine vierte Gleichung hinzu, sodass die Lösungsmenge des neuen LGS mit der des alten LGS übereinstimmt.

c) Füge eine vierte Gleichung hinzu, sodass die Lösungsmenge des neuen LGS leer ist.

m13v0645