☐ *Hier einige Verständnisfragen und Aufgaben zum Lektionsvideo „Parametergleichung der Ebene | Wie ist sie aufgebaut, wie "funktioniert" sie?“:*

- Fertige ein Erklärbildchen an, aus dem hervorgeht, wie die Parametergleichung der Ebene funktioniert. Kennzeichne, was Stützvektor und Spannvektoren sind. Zeige auch, wo diese Vektoren in der Parametergleichung auftreten.
- Wie werden Punkte auf der Ebene eindeutig beschrieben. Welche Rolle spielen die Parameter?

m13v0050

☐ Prüfe, ob die Punkte P bzw. Q in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegen.

a) $P(-10|1|4)$

b) $Q(3|-6|8)$

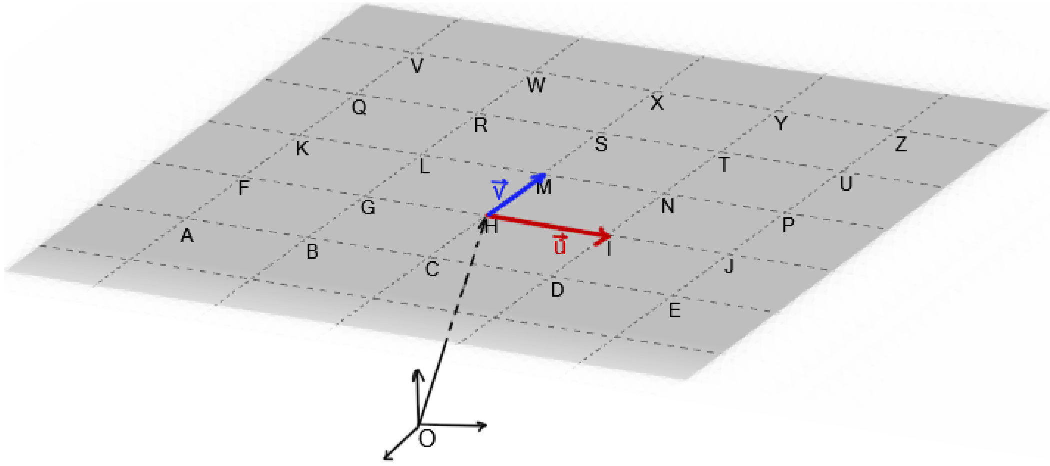
m13v0062

m130702

Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OH} + r\vec{u} + s\vec{v}$$

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt dieser Ebene. Alle angegebenen Punkte liegen in der Ebene, nur der Koordinatenursprung O liegt außerhalb der Ebene.



In der untenstehenden Tabelle sind Werte bzw. Intervalle für die Parameter r und s angegeben. Gib an, welches geometrische Objekt jeweils durch die Ebenengleichung beschrieben wird. Mache deine Angaben präzise, indem zu die Punkte in die Beschreibung mit einbeziehst. Hier einige Beispiele:

- Punkt M
- Gerade AB — Bemerkung: dies ist die Gerade durch die Punkte A und B
- Halbgerade $[AB$ — Bemerkung: diese hat den Anfangspunkt A und geht durch Punkt B
- Strecke $\overline{AB}$
- Parallogramm $ABCD$ — (gib auch an, ob die Figur mit oder ohne Rand beschrieben ist)
- Dreieck ABC — (auch angeben, ob mit oder ohne Rand)
- Halbebene … — z.B.: … mit Rand, begrenzt durch die Gerade AB und die Halbgerade $[AF$
- Viertelebene … — z.B.: … ohne Rand, begrenzt durch die Halbgeraden $[AB$ und $[AF$

Aufg.	Parameter r	Parameter s	Geometrisches Objekt
a)	$r = 0$	$s = -1$	
b)	$r = 1$	$s = 2$	
c)	$r \in \mathbb{R}_o^+$	$s = 1$	
d)	$r \in \mathbb{R}$	$s = 2$	
e)	$-1 \leq r \leq 2$	$s = -1$	
f)	$0 \leq r \leq 1$	$-1 \leq s \leq 3$	
g)	$r \in \mathbb{R}$	$s \in \mathbb{R}^+$	
h)	$r \geq -2$	$s \leq 3$	

☐ Liegen die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene?

a) $A(-1|0|4),\ B(2|2|2),\ C(0|3|0),\ D(4|1|4)$

b) $A(1|1|1),\ B(2|1|0),\ C(-1|5|3),\ D(-3|9|7)$

m13v0262

☐ Eine Ebene E ist durch die drei Punkte $A(1|5|-2)$, $B(2|0|5)$ und $C(-3|4|4)$ eindeutig bestimmt.

a) Gib eine Parametergleichung der Ebene E an.

b) Was wäre, wenn die Spannvektoren Vielfache voneinander wären?

c) Schreibe alternative Parametergleichungen für die Ebene E auf.

m13v0065

☐ Bestimme die Spurpunkte der Ebenen E_1 und E_2. Zeichne einen Ausschnitt der Ebene mit Hilfe der Spurpunkte ins Koordinatensystem. Welche der Ebenen hat eine besondere Lage im Koordinatensystem?

a) $E_1\colon \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{r} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E_2\colon \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} + \mathrm{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

m13v0165

☐ Von der Ebene E sind die folgenden Spurgeraden bekannt:

$g_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestimme eine Gleichung der Spurgerade g_{12} mit der x_1x_2-Ebene.

m13v0737

☐ Bestimme a so, dass der Punkt P auf der Ebene E liegt.

a) $P(6|a|-4)$; $\quad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(a|-2|a)$; $\quad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

m13v0263

☐ Bestimme eine Gleichung für die Ebene E, die durch die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und den Punkt $Q(5|5|-1)$ definiert ist.

m13v0066

☐ Bestimme eine Gleichung für die Ebene E, die durch die Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ definiert ist.

m13v0067

☐ Gegeben sind die beiden Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-2\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

a) Zeige, dass sich die Geraden g und h schneiden

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene E, die durch die sich schneidenden Geraden bestimmt ist.

c) Wenn man weiß, dass sich die Geraden g und h schneiden, benötigt man die Koordinaten des Schnittpunktes, um die Ebenengleichung aufzustellen? Warum?

m13v0068

☐ Gib für die nachfolgend beschriebenen Ebenen E_1 bis E_3 jeweils eine Parameterdarstellung an:

a) E_1 sei die x_1x_2-Ebene.

b) E_2 enthält den Punkt $P(3|4|-2)$ und verläuft parallel zur x_1x_3-Ebene.

c) E_3 wird durch die sich schneidenden Geraden g und h aufgespannt, wobei $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$.

m13v0230

☐ {zweiter Teil des Übungsvideos m13v0230}

Gib für die nachfolgend beschriebenen Ebenen E_4 und E_5 jeweils eine Parameterdarstellung an:

d) E_4 enthält den Punkt $P(-3|1|5)$ und die Gerade $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$.

e) E_5 enthält die Ursprungsgerade durch $Q(1|5|0)$ und steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene.

m13v0231

☐ Bestimme eine Parametergleichung der Ebene, welche die Punkte und $P(1|4|2)$ und $Q(8|-1|8)$ enthält und parallel zur z-Achse verläuft.

m13v0678

☐ Zeige, dass die Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ parallel zur x_1-Achse verläuft, indem du …

a) … nachweist, dass sich eine vektorielle Richtung der x_1-Achse als Linearkombination der Spannvektoren der Ebene darstellen lässt.

b) … die Spurpunkte von E bestimmst und damit die besondere Lage begründest.

c) … einen Normalenvektor der Ebene E bestimmst und damit die besondere Lage begründest.

m13v0669

☐ Für welche Werte des Parameters $k \in \mathbb{R}$ …

a) … verläuft die Ebene $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ k+1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} k+3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der x_1x_2-Ebene?

b) … verläuft die Ebene $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch den Ursprung?

c) … wird durch die Gleichung $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ k \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ keine Ebene beschrieben?

d) … ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ k \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel zu $E_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

m13v0690

☐ Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Begründe, dass alle Geraden der Schar g_a in einer gemeinsamen Ebene E liegen, und ermittle eine Parametergleichung dieser Ebene.

m13v0691

Teil 1

☐ Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a-3 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Begründe, dass alle Aufpunkte der Geradenschar auf einer Geraden liegen und gib eine Gleichung für diese Gerade h an, auf der alle Aufpunkte der Geradenschar liegen.

b) Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, in der alle Geraden der Geradenschar g_a enthalten sind.

m13v0692

Teil 2

☐ a) Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Punkte $A(1|1|1)$, $B(2|6|-4)$ und $D(-1|3|3)$. Liegen die Punkte $P(1|4|-1)$ bzw. $Q(2|3|-2)$ innerhalb des Parallelogramms?

b) Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Punkten $A(-1|1|2)$, $B(-1|-3|7)$, $C(-1|4|7)$. Liegen die Punkte $R(-1|2|6)$ bzw. $T(-1|-2|11)$ innerhalb des Dreiecks?

m13v0335

☐ Untersuche die gegenseitige Lage zwischen der Geraden g und der Ebene E. Falls vorhanden, bestimme den Schnittpunkt.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-8\\-2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ $\qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ $\qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-1\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$

m13v0016

☐ Ein Schüler hat eine Aufgabe zur Untersuchung der gegenseitigen Lage von einer Geraden g und einer Ebene E gelöst. Allerdings ist die Aufgabenstellung verloren gegangen; es stehen nur die Notizen des Schülers zur Verfügung, auf denen er aber weder Kommentare noch seine Schlussfolgerung vermerkt hat. Schaue dir die Aufzeichnungen an und rekonstruiere, was der Schüler untersucht hat und welche Schlussfolgerungen zu ziehen sind.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 6 - 4 - 2 = 0$

$\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot(-3) + (-4)\cdot(-2) + 1\cdot(-2) = -6 + 8 - 2 = 0$

m13v0409

☐ Ein Schüler hat eine Aufgabe zur Untersuchung der gegenseitigen Lage von einer Geraden g und einer Ebene E gelöst. Allerdings ist die Aufgabenstellung verloren gegangen; es stehen nur die Notizen des Schülers zur Verfügung, auf denen er aber weder Kommentare noch seine Schlussfolgerung vermerkt hat. Schaue dir die Aufzeichnungen an und rekonstruiere, was der Schüler untersucht hat und welche Schlussfolgerungen zu ziehen sind.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$

$r\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

↳ LGS: $\begin{aligned} 5r + s + 3t &= 0 \\ r - 4s + 3t &= 0 \\ -3r - 2s - t &= 0 \end{aligned}$

$\xrightarrow{GTR}$ unendlich viele Lösungen

$\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$

↳ LGS: $\begin{aligned} 4 &= -1 + 5r \\ 3 &= 2 + r \\ 1 &= 4 - 3r \end{aligned}$

$5 = 5r \Rightarrow r = 1$

$1 = r \Rightarrow r = 1$

$-3 = -3r \Rightarrow r = 1$

m13v0349

☐ Untersuche jeweils die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E_1 und E_2. Bestimme gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$

c) $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + l\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$

m13v0137

☐ Es sind die Punkte $A(2|2|1)$, $B(-1|6|-3)$, $C(0|4|2)$ sowie der Punkt $D(2|d|8)$ gegeben.

a) Begründe mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, dass A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

b) Gib eine Gleichung für die Ebene an, die die Punkte A, B und C enthält.

c) Bestimme die Koordinate d des Punktes, so dass das Dreieck BCD im Punkt C rechtwinklig ist.

m13v0366