3. erweiterte Auflage

Original Abitur-Aufgaben

aus dem IQB-Aufgabenpool der Länder

200 Aufgaben • Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei)

Analysis • Analytische Geometrie • Lineare Algebra • Stochastik

Alle Aufgaben mit **QR-Codes** zu den Lösungsvideos auf **mathehoch13**, ausführlich kommentiert von

Christoph Goemans

Subscribe mathehoch13

Inhaltsverzeichnis

Über diese Aufgabensammlung

Dieses Dokument enthält eine systematisch aufgebaute Sammlung von **Original-Abituraufgaben aus dem IQB-Aufgabenpool der Länder**. Die Sammlung richtet sich gezielt an Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe zur Vorbereitung auf den **hilfsmittelfreien Teil der Mathematik-Abiturprüfung**.

Der IQB-Aufgabenpool wird vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) bereitgestellt und umfasst Aufgaben, die bundesweit als Grundlage für zentrale Abiturprüfungen dienen.

Ziel dieser Sammlung ist es, eine zentrale, verlässliche und didaktisch strukturierte Grundlage für die Abiturvorbereitung bereitzustellen – sowohl für das eigenständige Lernen als auch für den Einsatz im Unterricht.

Die Aufgaben sind

- nach inhaltlichen Themengebieten sowie
- nach Anforderungsniveau (grundlegend / erhöht)

geordnet.

Dadurch wird ein gezieltes und effizientes Training ermöglicht: Klausurtypische Aufgabenformate können systematisch eingeübt, individuelle Schwächen gezielt bearbeitet und Kompetenzen schrittweise auf Prüfungsniveau entwickelt werden.

Jede Aufgabe ist mit einem **QR-Code** versehen, der direkt zu einem passenden **Erklärvideo** auf dem YouTube-Kanal *mathehoch13* führt. Die Videos bieten eine strukturierte, schrittweise Lösung und können sowohl zur Selbstkontrolle als auch zur Vertiefung eingesetzt werden.

Tipp: **Die QR-Codes sind im PDF anklickbar**, sodass sich die Videos auch bequem direkt aus dem Dokument heraus öffnen lassen, etwa beim Arbeiten am Tablet oder im Browser.

PDF bequem im Browser nutzen

Tipp: Zu jedem Video steht in der jeweiligen Videobeschreibung außerdem ein Link für **ein individuelles Arbeitsblatt zur Aufgabe** zur Verfügung. Dieses kann ausgedruckt werden und eignet sich zum **schriftlichen Mitrechnen**, zur eigenen Lösungsdokumentation sowie zum **systematischen Aufbau eines persönlichen Mathematik-Lernordners**.

Auch einzelne Arbeitsblätter für jede Aufgabe

Tipp: Über die m13v-Nummer, die unter jedem QR-Code steht, kannst du das Video gezielt referenzieren und z.B. mit anderen Teilen (z.B. *„Sieh dir noch mal m13v0896 zum Zusammenhang von Änderungsrate, Bestandsänderung und Integral an..“*). Gibst du die Nummer in die YouTube-Suche ein, gelangst du direkt zum entsprechenden Video (sofern es bereits öffentlich verfügbar ist).

die Bedeutung der m13v-Nummern

Die Kombination aus Originalaufgabe und passendem Video ermöglicht dir ein unmittelbares Feedback: Du kannst zunächst selbstständig arbeiten und deine Lösung anschließend direkt überprüfen und nachvollziehen.

Die Erklärvideos sind zwar auch in der YouTube-Playlist **„Original-Abituraufgaben“** gebündelt verfügbar, die vorliegende PDF-Sammlung bietet jedoch einen deutlich höheren Arbeits- und Lernkomfort: Die Aufgaben sind hier systematisch geordnet, lassen sich schnell überblicken, gezielt auswählen und für das eigene Lernen markieren.

Playlist „Original-Abituraufgaben“

Diese Struktur macht die Sammlung zu einem echten Arbeitsinstrument – nicht nur zum Anschauen, sondern zum aktiven Üben und Wiederholen.

Aktueller Ausbau & Fahrplan bis zum Abitur

Die aktuelle Version dieser Sammlung umfasst inzwischen 200 Aufgaben mit zugehörigen Lösungsvideos und wird kontinuierlich erweitert.

Bis zum Mathematik-Abitur Anfang Mai ist geplant, täglich ein neues Video zu veröffentlichen.

Hinweis zur Videoverfügbarkeit

Die Videos zu den Aufgaben werden bis zum Mathematik-Abitur schrittweise öffentlich freigeschaltet; geplant ist die tägliche Veröffentlichung eines Videos.

Stand 23.03.2026 sind bereits mehr als 70 % der hier gelisteten Videos frei verfügbar. Bis zum Abitur soll an jedem Tag ein weiteres Video veröffentlicht werden.

Es kann daher vorkommen, dass ein über den QR-Code aufgerufenes Video zum Zeitpunkt der Nutzung noch nicht frei verfügbar ist.

Alle bereits vorproduzierten Videos sind für Kanalmitglieder sofort zugänglich. Ein vollständiger und frühzeitiger Zugriff auf sämtliche Inhalte ist über die Kanalmitgliedschaft (ab Level 2) möglich und unterstützt zugleich die Weiterentwicklung dieser Sammlung.

Werde Kanalmitglied

(ab **Level 2**: 4,99 Eur/Monat Vorab-Zugriff auf alle Videos)

Weitergabe ausdrücklich erwünscht

Diese kostenlose Aufgabensammlung darf gerne an Lehrkräfte, Mitschülerinnen und Mitschüler weitergegeben werden.

Je mehr Schülerinnen und Schüler mit dieser Sammlung arbeiten, desto stärker wird sie als gemeinsame Grundlage für eine erfolgreiche Abiturvorbereitung genutzt.

Sie eignet sich sowohl für das Eigenstudium, für Lerngruppen als auch zur Unterrichtsvorbereitung.

So bleibst du auf dem Laufenden: Der WhatsApp-Kanal und Instagram

Neue Videos, Lernhilfen und Aufgabensammlungen kündige ich regelmäßig über die YouTube-Community und Instagram an.

Wenn du nichts verpassen möchtest, kannst du zusätzlich den WhatsApp-Ankündigungskanal abonnieren – dort bekommst du alle wichtigen Updates übersichtlich zusammengefasst.

WhatsApp-Kanal von mathehoch13

Persönliche Unterstützung / Nachhilfe

Wer über die Videos hinaus individuelle Unterstützung wünscht (z. B. gezielte Abiturvorbereitung, Nachhilfe oder kontinuierliches Mentoring), kann sich gerne direkt bei mir melden.

WhatsApp / SMS:
01577 5304819

Mail:
nachhilfe@mathehoch13.de

PN über Insta:
@mathehoch13

Die Struktur der Abiturprüfung in Mathematik gemäß IQB

Die schriftliche Abiturprüfung gliedert sich in zwei Teile:

- **Teil A** wird **ohne Hilfsmittel** bearbeitet. Diese Sammlung enthält ausschließlich Teil A-Aufgaben.
- **Teil B** wird **mit Hilfsmitteln** (WTR, GTR oder CAS) bearbeitet.

Die einzelnen Teilaufgaben werden **Anforderungsbereichen** zugeordnet, die die kognitive Komplexität der geforderten Leistung beschreiben:

- **Bereich I**: Reproduktion – bekannte Verfahren anwenden
- **Bereich II**: Anwendung und Vernetzung – bekannte Inhalte in neuen Zusammenhängen nutzen
- **Bereich III**: Problemlösen und Transfer – komplexe, mehrschrittige Aufgabenstellungen eigenständig bewältigen

Innerhalb von Teil A (hilfsmittelfreier Teil) werden die Aufgaben zusätzlich in Aufgabengruppen unterteilt. Diese Einteilung berücksichtigt, wie die Teilaufgaben hinsichtlich der Anforderungsbereiche zusammengesetzt sind:

- **Aufgabengruppe 1** enthält Aufgaben, bei denen die **Anforderungsbereiche I und II** im Vordergrund stehen.
- **Aufgabengruppe 2** enthält Aufgaben, die auch den **Anforderungsbereich III** (Transfer, Problemlösen) abdecken.

Das Anforderungsniveau (grundlegend / erhöht) legt fest, für welchen Prüfungsgang die Aufgabe gedacht ist – grundlegendes Niveau für Grundkurse, erhöhtes Niveau für Leistungskurse.

Für ein erfolgreiches Bestehen der Prüfung ist es erforderlich, nicht nur Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II zu lösen, sondern auch Punkte im Anforderungsbereich III zu erzielen.

Verteilung der Aufgaben dieser Sammlung auf Themengebiete, Anforderungsniveau und Aufgabengruppen

	Grundlegendes Niveau			Erhöhtes Niveau			
Themengebiet	AG 1	AG 2	gesamt	AG 1	AG 2	gesamt	gesamt
ANALYSIS	24	8	32	19	13	32	**64**
ANALYTISCHE GEOMETRIE	16	8	24	18	8	26	**50**
LINEARE ALGEBRA	13	4	17	10	6	16	**33**
STOCHASTIK	19	10	29	14	10	24	**53**
gesamt	**72**	**30**	**102**	**61**	**37**	**98**	**200**

So kannst du das mathehoch13-Projekt unterstützen

Weiterempfehlen	**Abonniere meinen YouTube-Kanal**
• Empfiehl mathehoch13 an Lehrkräfte sowie Mitschülerinnen und Mitschüler weiter • Teile z.B. die kostenlosen Arbeitsblätter und Aufgabensammlungen – auch gerne über soziale Medien	• Durch Abonnieren, Likes, Kommentare und das Teilen von Videos hilfst du dem YouTube-Algorithmus, *mathehoch13* besser sichtbar zu machen.
Kanalmitgliedschaft	**Paypal-Spende**
• Ab Level 2 (4,99 €/Monat) erhältst du frühzeitigen Zugriff auf neue Videos und unterstützt die laufende Weiterentwicklung des Projekts.	• Eine freiwillige Unterstützung per PayPal ist ebenfalls möglich.

Viel Erfolg beim Lernen und Üben!

Mit freundlichen Grüßen

Christoph Goemans von *mathehoch13*

Copyright & Nutzungshinweise / Legal Notice

Impressum

Mathehoch13
Dr. Christoph Goemans
Kontakt: nachhilfe@mathehoch13.de

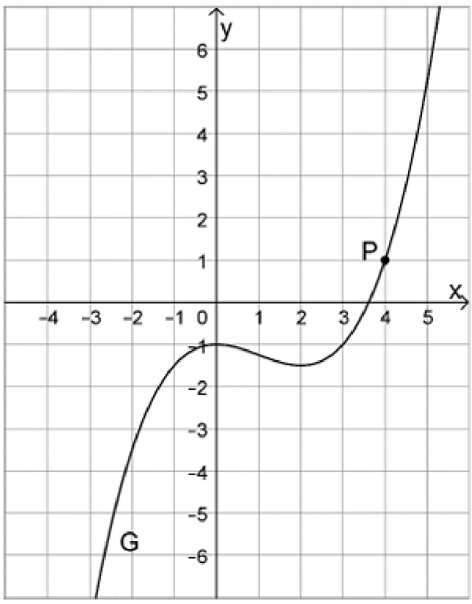
Analysis

Grundlegendes Niveau

2025

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-1$. Die Abbildung zeigt den Graphen G von f. Die Tangente an G im Punkt $P(4\,|\,1)$ wird mit t bezeichnet.



	BE
a Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung von t.	3
b Es gibt genau eine weitere Tangente an G, die parallel zu t verläuft. Skizzieren Sie diese in der Abbildung.	2
	5

m13v0905
AG 1
IQB-Link

☐

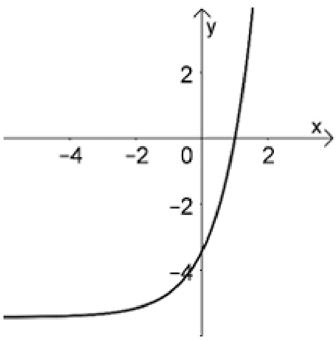
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f mit $f(x)=4x^3-6x$.

	BE
a Bestimmen Sie die Stammfunktion F von f, deren Graph durch den Punkt $(1\,|\,0)$ verläuft.	3
b Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=0$ ist.	2
	5

m13v0966
AG 1
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=2e^x-2e$.

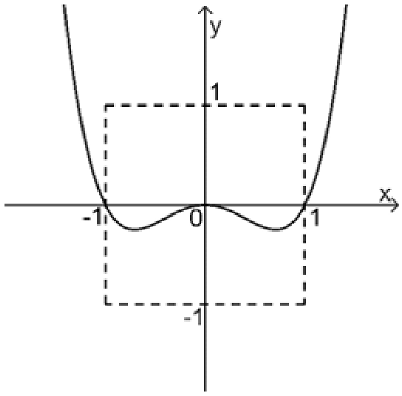


	BE
a Weisen Sie nach, dass 1 eine Nullstelle von f ist.	1
b Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Berechnen Sie ihren Inhalt.	4
	5

m13v0974
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - x^2$. Die Abbildung zeigt ein zu beiden Koordinatenachsen symmetrisches Quadrat mit der Seitenlänge 2 sowie den Graphen von f.



BE

a Der Graph von f wird um 1 in y-Richtung verschoben. Skizzieren Sie den verschobenen Graphen in der Abbildung. — 1

b Der Graph von f wird nun um c mit $c > 0$ in y-Richtung verschoben, sodass der Graph das Quadrat in zwei Flächen gleichen Inhalts teilt. Berechnen Sie c. — 4

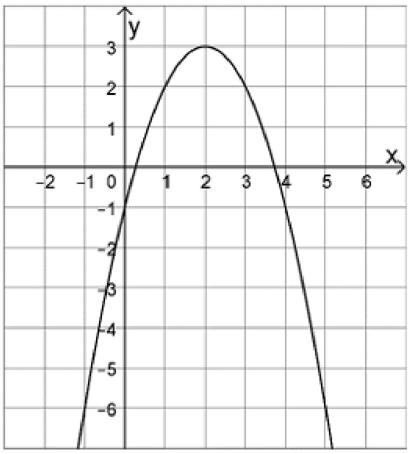
5

m13v0973
AG 2
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

Betrachtet wird die Gleichung $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(x)$.



BE

a Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f an und ermitteln Sie rechnerisch die Lösungen der Gleichung. — 3

b Geben Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung an, die sich für deren Lösungen ergibt. — 2

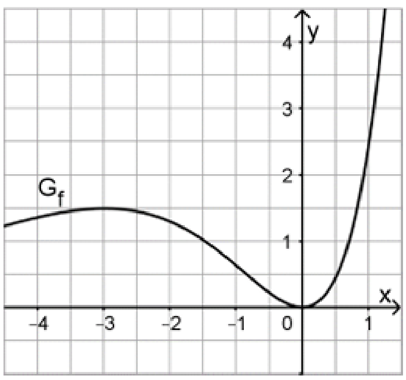
5

m13v0965
AG 2
IQB-Link

2024 3

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



BE

a Bestimmen Sie grafisch den Wert des Integrals $\int_{-3}^{-1,5} f(x)\,dx$. — 2

b Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion u mit $u(x) = -f(x) + 2$ aus G_f erzeugt werden kann. Geben Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von u an. — 3

5

m13v0869
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. (BE: 1)

b Der Graph von f und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (BE: 4)

BE gesamt: 5

m13v0937
AG 1
IQB-Link

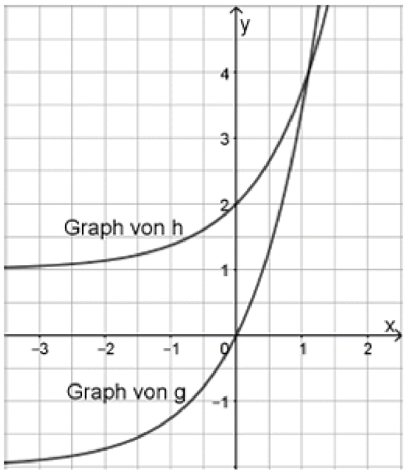
☐

Gegeben sind die in IR definierten Funktionen g mit $g(x) = 2 \cdot e^x - 2$ und h mit $h(x) = e^x + 1$.
Die Abbildung zeigt ihre Graphen.

a Die erste Ableitungsfunktion von g wird mit g' bezeichnet. Berechnen Sie $g'(0)$ und veranschaulichen Sie in der Abbildung, wie man diesen Wert grafisch ermitteln kann. (BE: 3)

b Beurteilen Sie die folgende Aussage: (BE: 2)

Es gibt eine Verschiebung in y-Richtung, durch die der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann.



BE gesamt: 5

m13v0914
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x$. Betrachtet wird das Intervall, das von den x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte des Graphen von f und der Gerade g begrenzt wird.
In diesem Intervall gibt es eine Stelle, an der die lokale Änderungsrate von f mit der mittleren Änderungsrate von f in diesem Intervall übereinstimmt. Bestimmen Sie diese Stelle. (BE: 5)

m13v1032
AG 2
IQB-Link

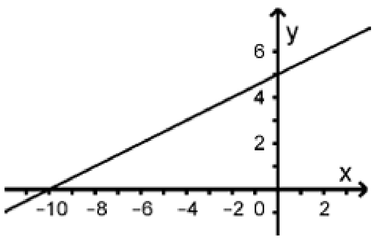
2023

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten linearen Funktion f.

a Begründen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ gilt. (BE: 1)

b Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs zum Graphen. (BE: 4)



BE gesamt: 5

m13v0944
AG 1
IQB-Link

☐

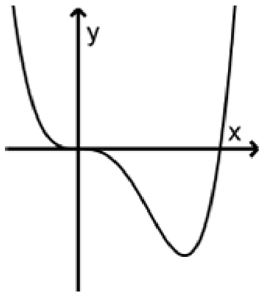
Betrachtet wird eine Funktion f, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1|f(1))$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x + 4$.

	BE
a Geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an den Graphen von f im Punkt $(-1|f(-1))$ an und begründen Sie Ihre Angabe.	2
b Die Tangenten t_1 und t_2 schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.	3
	5

m13v1018
AG 1
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion $f: x \mapsto x^4 - 4x^3$.



	BE
a Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)\,dx$.	2
b Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: *Für die Abbildung wurde eine Längeneinheit auf der x-Achse ebenso groß gewählt wie auf der y-Achse.*	3
	5

m13v1033
AG 1
IQB-Link

☐

Betrachtet wird die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

	BE
a Geben Sie die Wertemenge von f an.	2
b Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = 2x \cdot f(x)$. Die Graphen von f und f' schneiden sich in einem Punkt. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in diesem Punkt.	3
	5

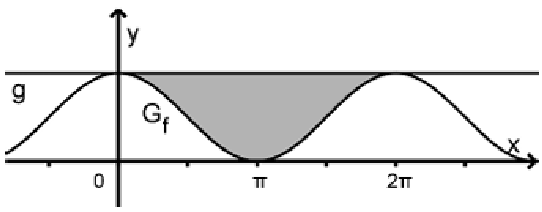
m13v0970
AG 2
IQB-Link

2022

☐

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = \cos(x) + 1$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.

Die Gerade g verläuft durch die Hochpunkte von G_f.



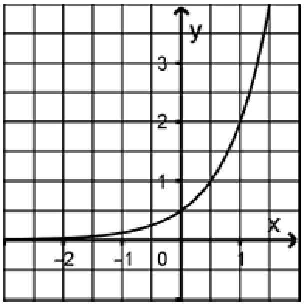
	BE
a Begründen Sie, dass die Gerade g durch die Gleichung $y = 2$ dargestellt werden kann.	1
b Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die in der Abbildung grau markiert ist.	4
	5

m13v0953
AG 1
IQB-Link

☐

BE

a Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die passenden Werte von a und b. — 3



b Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto 3^x$ wird um 2 in negative x-Richtung verschoben. Zeigen Sie, dass der dadurch entstehende Graph auch durch eine Streckung des Graphen von g in y-Richtung erzeugt werden kann. — 2

5

m13v0987
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Der Graph der in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} - 5$ geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ durch eine Verschiebung in x-Richtung und eine Verschiebung in y-Richtung hervor. Geben Sie die beiden Verschiebungen an. Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an und berechnen Sie unter Verwendung dieses Terms den Wert der ersten Ableitungsfunktion von g an der Stelle 2. — 5

m13v1028
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$, für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x$ eine Fläche mit dem Inhalt 36 einschließen. — 5

m13v0971
AG 2
IQB-Link

2021

☐ BE

m13v0940
AG 1
IQB-Link

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in IR definierten Funktion f, die Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion F von f.

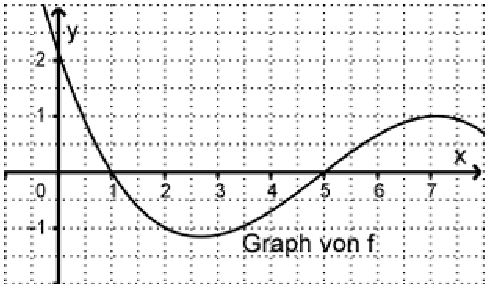


Abb. 1

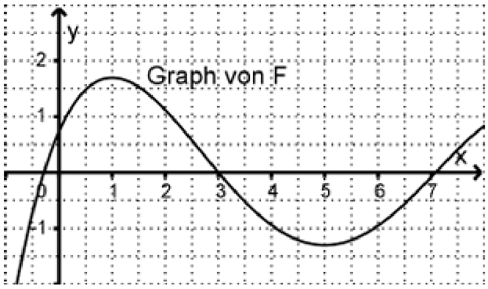


Abb. 2

a Bestimmen Sie ausschließlich mithilfe der Abbildung 2 den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$. 2

b Beschreiben Sie, wie man den Wert des Terms $\int_1^5 f(x)\,dx$ ausschließlich mithilfe der Abbildung 1 bestimmen könnte. 3

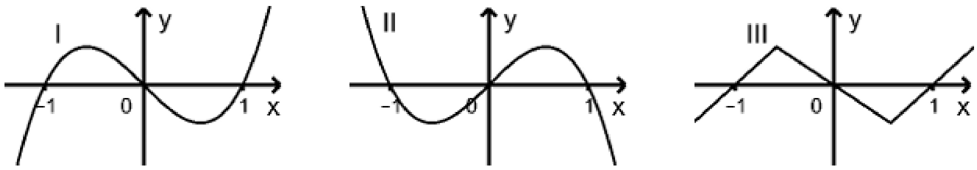
5

☐ BE

m13v1016
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.

a Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe. 2



b Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen. 3

5

☐ BE

m13v1017
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(x) + 1$.

a Bestimmen Sie den Wert des Terms $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. 3

b Der Graph der Funktion g kann aus dem Graphen von f durch Strecken mit dem Faktor 0,2 in x-Richtung und Verschieben um 3 in positive y-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von g an. 2

5

2020

☐

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto x^3 - 12x + 16$.

a Zeigen Sie, dass -2 und 2 die Extremstellen von f sind. — 3 BE

b Begründen Sie, dass die x-Achse den Graphen von f in genau einem Punkt berührt. — 2 BE

BE: 5

m13v0929
AG 1
IQB-Link

☐

Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(2 \mid f(2))$ hat die Gleichung $y = 4x - 2$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f. — 5 BE

m13v1003
AG 1
IQB-Link

2019

☐

Gegeben sind die in IR definierten Funktionen $g: x \mapsto x^2 - 3$ und $h: x \mapsto -x^2 + 2x + 1$.

a Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -1$ und $x = 2$ schneiden. — 2 BE

b Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen. — 3 BE

BE: 5

m13v0935
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x + 1$ und $x \in IR$.

a Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte, in denen der Graph von f die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ schneidet. — 2 BE

b Unter den Tangenten an den Graphen von f hat eine die kleinste Steigung. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente. — 3 BE

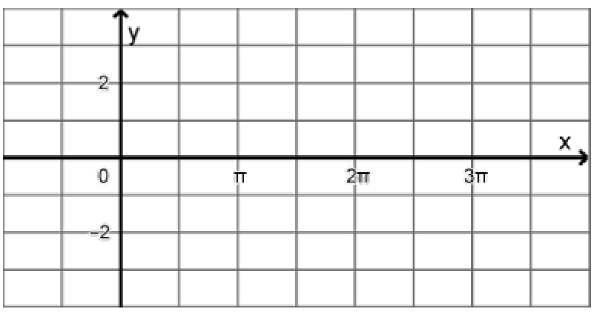
BE: 5

m13v0994
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin(x) - 2$ mit Definitionsmenge IR.

a Skizzieren Sie den Graphen von f für $-\pi \leq x \leq 4\pi$ im abgebildeten Koordinatensystem. — 1 BE



b Jede Tangente an den Graphen von f in einem der Punkte $(2k\pi \mid f(2k\pi))$ mit $k \in IN$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Begründen Sie, dass jedes dieser Dreiecke gleichschenklig ist. — 4 BE

BE: 5

m13v1031
AG 2
IQB-Link

2018

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x^2}+1$.

	BE
a Skizzieren Sie den Graphen von f.	2
b Der Graph von f schließt mit der Gerade mit der Gleichung $y=1$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x=1$ und $x=2$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.	3
	5

m13v0969
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 3-2\sin x$.

	BE
a Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0\,|\,f(0))$.	3
b Geben Sie den Wertebereich von f an.	2
	5

m13v0884
AG 1
IQB-Link

☐

Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t)=-t\cdot(t-4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.

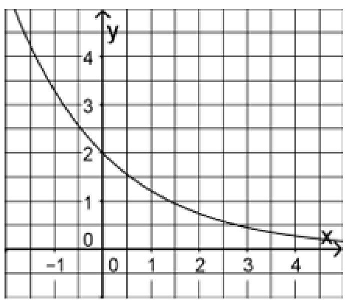
	BE
a Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt.	3
b Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält.	2
	5

m13v0896
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$. Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}$.



	BE
a Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.	2
b Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse sowie einer zur y-Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt. Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.	3
	5

m13v0862
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto x^3 + 2x^2$.

a Bestätigen Sie, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind. (2 BE)

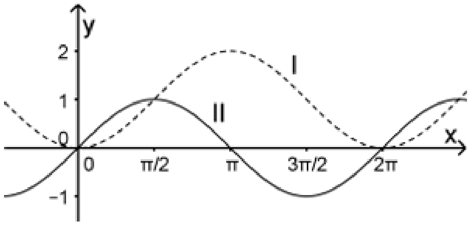
b Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. (3 BE)

BE: 5

m13v0864
AG 1
IQB-Link

☐

a Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und deren erster Ableitungsfunktion. (2 BE)



Geben Sie an, welcher der beiden Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt, und begründen Sie Ihre Angabe.

b Für einen Wert von k mit $k \in IR^+$ wird die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = k\sin(x)$ betrachtet. Für $0 \le x \le \pi$ schließt der Graph von f mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt $\frac{1}{2}$ ein. Bestimmen Sie den Wert von k. (3 BE)

BE: 5

m13v0865
AG 2
IQB-Link

Erhöhtes Niveau

2025

☐

BE

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a durch $f_a(x) = x \cdot e^{-a \cdot x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Jeder Graph der Schar verläuft durch den Koordinatenursprung.

a Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar im Koordinatenursprung die gleiche Steigung haben. 3

b Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind. 2

5

m13v0915
AG 1
[IQB-Link]

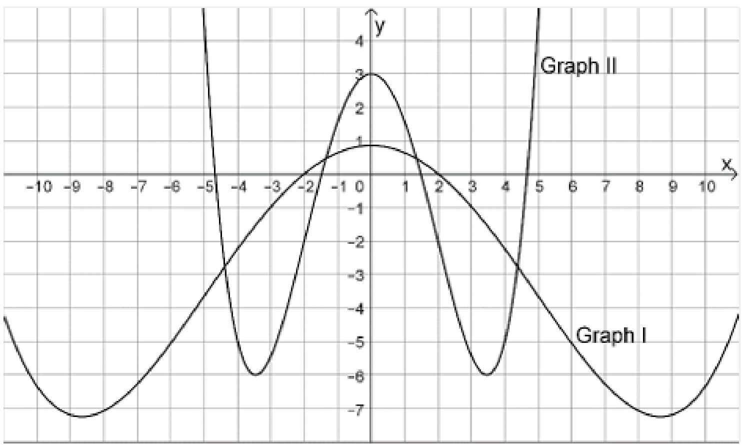
☐

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

a Es gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist. 2

b Einer der abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe. 3



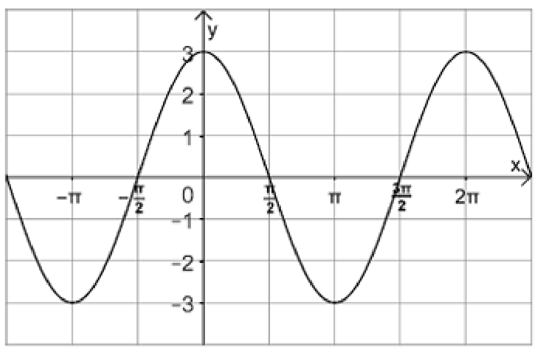
5

m13v0916
AG 1
[IQB-Link]

☐

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.



a Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ an. 1

b Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. 4
Die Punkte $(0 \mid -3)$ und $\left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g. Ermitteln Sie a und b.

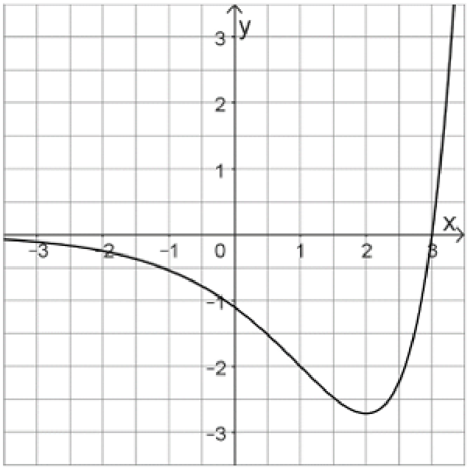
5

m13v0981
AG 1
[IQB-Link]

☐

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktionen f und g. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = f(x) \cdot e^x$.

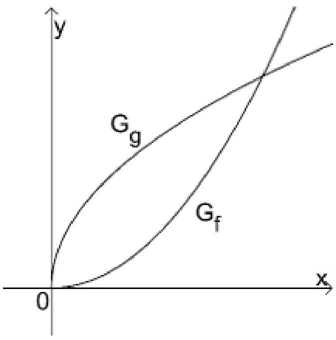
	BE
a Weisen Sie nach, dass die folgende Aussage wahr ist. *Wenn der Graph von g im Punkt $(a \mid g(a))$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine waagerechte Tangente besitzt, dann gilt $f'(a) = -f(a)$.*	3
b Die Abbildung stellt den Graphen von f dar. Zeigen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von g im Punkt $(1 \mid g(1))$ keine waagerechte Tangente besitzt.	2
	5



m13v0975
AG 2
IQB-Link

☐

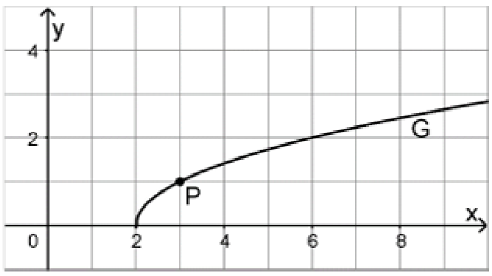
	BE
Gegeben sind die in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktionen f und g, wobei g die Umkehrfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt die Graphen G_f von f und G_g von g. G_f und G_g schneiden sich nur im Koordinatenursprung und im Punkt $(x_S \mid f(x_S))$. Beurteilen Sie die folgende Aussage: $\int_0^{x_S} (g(x) - f(x))dx = 2 \cdot \int_0^{x_S} (x - f(x))dx$	5



m13v0982
AG 2
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Funktion
$f: x \mapsto \sqrt{x-2}$ mit $x \in [2; +\infty[$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G von f sowie den Punkt $P(3 \mid 1)$.
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur den Punkt P gemeinsam.



	BE
a Zeichnen Sie die Tangente in die Abbildung ein.	1
b Betrachtet werden alle Geraden, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam haben. Geben Sie die Steigungen dieser Geraden an.	4
	5

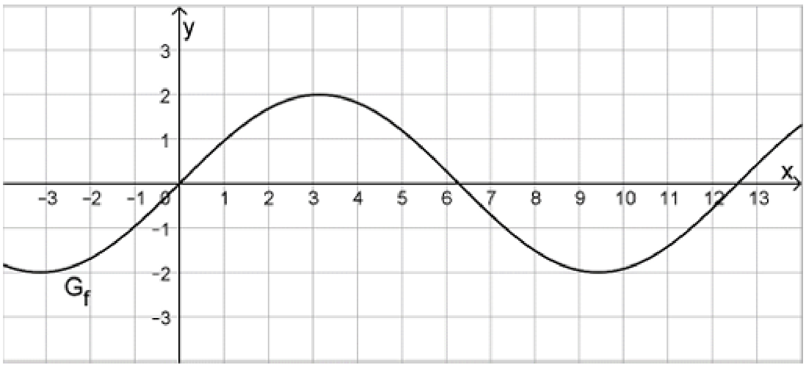
m13v0984
AG 2
IQB-Link

2024

☐ BE

m13v1034
AG 1
IQB-Link

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.



a Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals $\int_{-2}^{8} f(x)\,dx$ negativ ist. 2

b Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft: 3

Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

5

☐ BE

m13v1026
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^3 + ax^2$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

a Geben Sie den Wert von a an, so dass der Punkt $(1|6)$ auf dem Graphen von f_a liegt. 1

b Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt. 4

5

☐ BE

m13v0928
AG 1
IQB-Link

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{a \cdot x}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion f_a genau eine Extremstelle.

a Begründen Sie, dass der Graph von f_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft. 2

b Beide Abbildungen zeigen einen Graphen der Schar, einen der beiden für einen positiven Wert von a. Entscheiden Sie, welche Abbildung dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

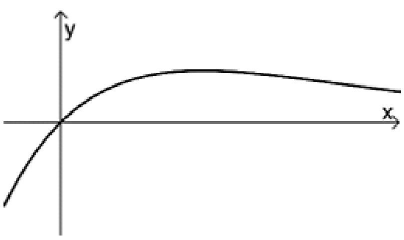


Abb. 1

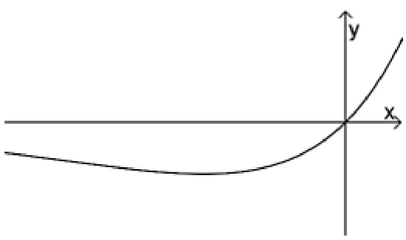


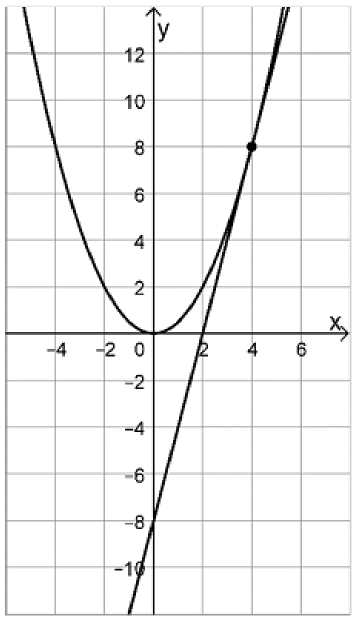
Abb. 2

5

☐

BE

Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $\left(4 \mid f_{\frac{1}{2}}(4)\right)$.



a Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an. 1

b Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u \mid f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0 \mid -f_a(u))$ schneidet. 4

5

m13v0930
AG 2
IQB-Link

2023

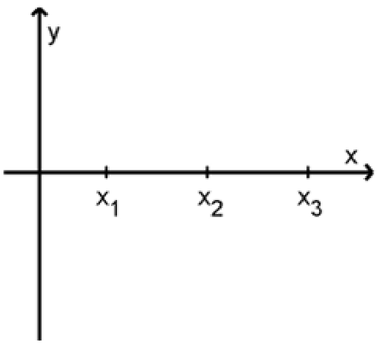
☐

BE

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.



a Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist. 2

b Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f. 3

5

m13v0913
AG 1
IQB-Link

☐

BE

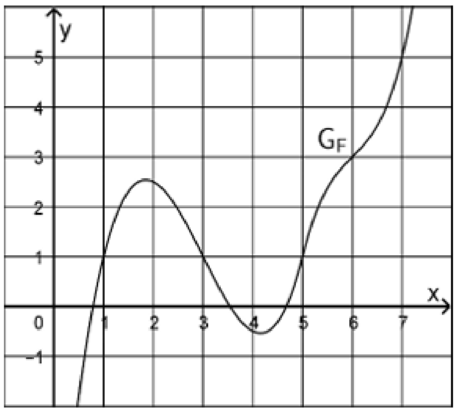
Eine in $\mathbb{R}$ definierte Kosinusfunktion f hat die Periode p. Der Punkt $\left(\frac{p}{2} \mid p\right)$ ist ein Hochpunkt des Graphen von f, der Punkt $\left(\frac{p}{4} \mid \frac{p}{2}\right)$ ein Wendepunkt. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $\frac{p}{4}$. 5

m13v0989
AG 2
IQB-Link

2022

☐

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



BE

a Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$. — 2

b Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung. — 3

5

m13v0942
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen $f_k : x \mapsto x^4 + (2-k)\cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

BE

a Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. — 1

b Es gibt einen Wert von k, für den 1 eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k. — 4

5

m13v1027
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion g, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: — 5

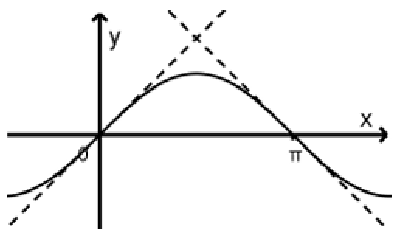
- ♦ Der Graph von g schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0|1)$ unter einem rechten Winkel.
- ♦ Die x- und die y-Koordinate des Extrempunkts des Graphen von g stimmen überein.

m13v1029
AG 2
IQB-Link

2021

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin x$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die Tangenten an G_f in den dargestellten Schnittpunkten mit der x-Achse.



BE

a Zeigen Sie, dass diejenige der beiden Tangenten, die durch den Koordinatenursprung verläuft, die Steigung 1 hat. — 1

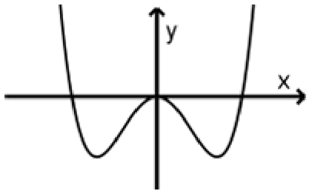
b Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f und den beiden Tangenten eingeschlossen wird. — 4

5

m13v0909
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist eine in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von f.



	BE
a Zeigen Sie, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.	1
b Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die y-Koordinate -1. Ermitteln Sie den Wert von k.	4
	5

m13v1025
AG 1
IQB-Link

☐

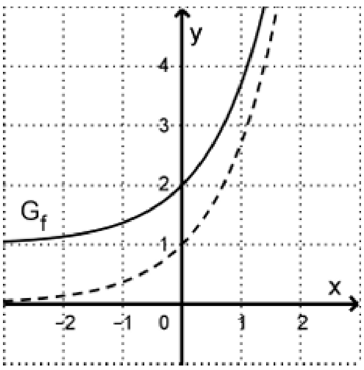
Gegeben sind die in IR definierten Funktionen f und g. Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $(2 \mid 1)$.

	BE
a Geben Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts an.	2
b Untersuchen Sie die in IR definierte Funktion h mit $h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$ im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen.	3
	5

m13v1013
AG 2
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in IR definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.



	BE
a Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0 \mid f(0))$ an.	1
b Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in IR^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0 \mid g_c(0))$ schneidet die x-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Schnittpunkts.	4
	5

m13v1030
AG 2
IQB-Link

2020

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto \sin x$ und $g: x \mapsto x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0|0)$ die gleiche Steigung.

a Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen. — BE: 3

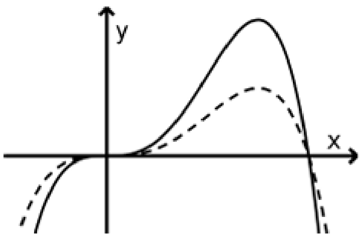
b Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: — BE: 2

- Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g.
- Die Tangente enthält nicht den Punkt O.

BE gesamt: 5

m13v1000
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k: x \mapsto -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Alle Funktionen der Schar haben die Nullstellen 0 und 4. Die Abbildung stellt zwei Graphen der Schar dar.



a Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts des Graphen von f_k. — BE: 2

b Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das die Graphen von f_k und f_{k+1} einschließen, für alle Werte von k den gleichen Inhalt hat. — BE: 3

BE gesamt: 5

m13v1001
AG 1
IQB-Link

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

a Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist. — BE: 1

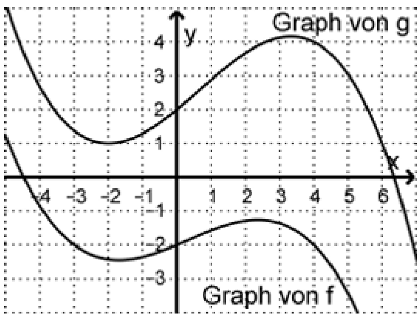
b Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben. — BE: 4

BE gesamt: 5

m13v0938
AG 2
IQB-Link

Die Abbildung zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g. Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4|h(4))$. — BE: 5

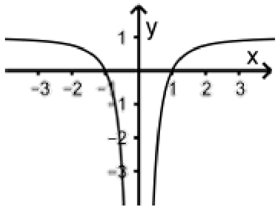


m13v0968
AG 2
IQB-Link

2019

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 1-\frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1=-1$ und $x_2=1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y=-3$ gegeben.

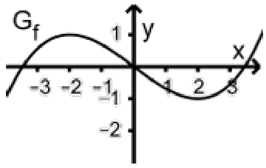


	BE
a Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.	1
b Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.	4
	5

m13v1024
AG 1
IQB-Link

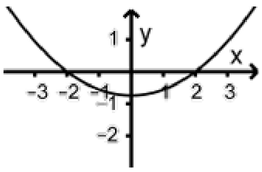
☐

Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.

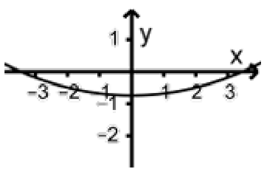


	BE
a Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.	3

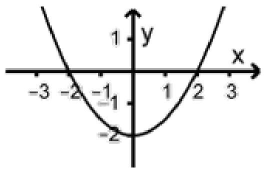
I



II



III



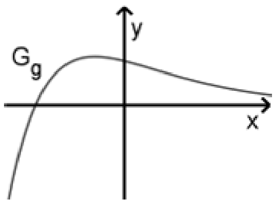
	BE
b Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.	2
	5

m13v0912
AG 1
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x)=e^{g(x)}$ gilt.



	BE
a Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.	2
b Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.	3
	5

m13v1012
AG 2
IQB-Link

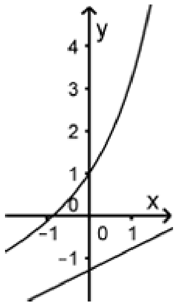
2018

☐

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in IR definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. — 2 BE

b Für eine positive reelle Zahl c wird die in IR definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c. Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c. — 3 BE

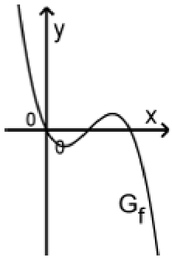


BE: 5

m13v0888
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in IR$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f, der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.



a Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat. — 2 BE

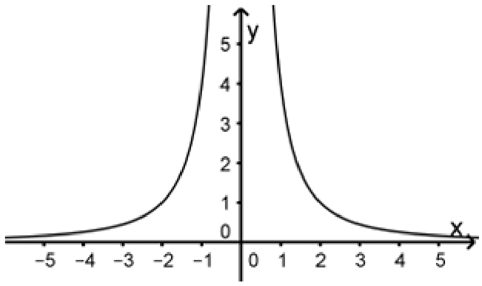
b Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an. — 3 BE

BE: 5

m13v0889
AG 1
IQB-Link

☐

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $IR \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2}$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.



a Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p. — 2 BE

b Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q. — 3 BE

BE: 5

m13v0890
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Eine Funktion f ist durch $f(x)=2e^{\frac{1}{2}x}-1$ mit $x\in\mathbb{R}$ gegeben.

a Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f. — 2 BE

b Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0\,|\,1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. — 3 BE

BE: 5

m13v0866
AG 1
IQB-Link

☐

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t)=3t^2-60t+500$ mit $t\in\mathbb{R}$, $0\le t\le 10$, beschrieben werden.

a Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung. — 3 BE

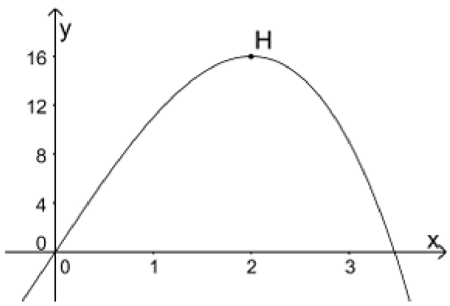
b Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt. — 2 BE

BE: 5

m13v0867
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=-x^3+12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2\,|\,16)$.



a Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=2$ schließen für $0\le x\le 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt. — 2 BE

b Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0\le x\le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse. — 3 BE

BE: 5

m13v0863
AG 2
IQB-Link

Analytische Geometrie

Grundlegendes Niveau

2025

☐

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a Zeigen Sie, dass der Punkt $P(4\,|\,3\,|\,3)$ nicht auf g liegt.
Geben Sie die Koordinaten eines Punktes Q an, der auf g liegt und sich nur in einer Koordinate von P unterscheidet. — 3 BE

b Die Gerade h verläuft parallel zur y-Achse und schneidet g im Punkt $(8\,|\,3\,|\,-3)$.
Untersuchen Sie, ob g und h senkrecht zueinander verlaufen. — 2 BE

BE: 5

m13v0908
AG 1
IQB-Link

☐

Betrachtet werden die Punkte $P(3\,|\,1\,|\,-1)$ und $Q(4\,|\,2\,|\,-4)$.

a Begründen Sie, dass die Punkte P und Q auf derselben Seite bezüglich der xy-Ebene liegen. — 1 BE

b Die Punkte P, Q und der Koordinatenursprung O sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis $\overline{OQ}$ die Länge 6 hat.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. — 4 BE

BE: 5

m13v1020
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Punkte $P(0\,|\,-1\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,5\,|\,3)$.

a Durch Spiegelung des Punktes P am Punkt Q entsteht der Punkt P'. Ermitteln Sie die Koordinaten von P'. — 2 BE

b Die Ebene E hat die Gleichung $E: x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$. Weisen Sie nach, dass Q in E liegt und der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ein Normalenvektor von E ist. — 3 BE

BE: 5

m13v0904
AG 1
IQB-Link

☐

Die Ebene E wird durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

beschrieben.

a Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene E steht. — 2 BE

b Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts P mit folgender Eigenschaft:
Wird der Punkt P an der Ebene E gespiegelt, so hat der entstehende Punkt vom Punkt P den Abstand 20. — 3 BE

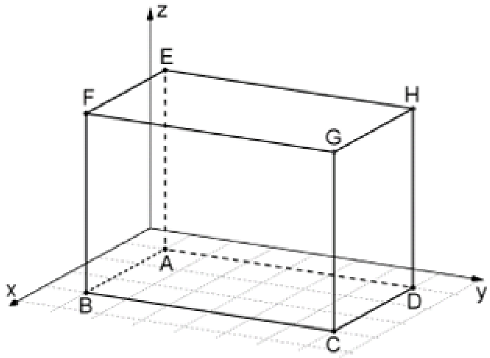
BE: 5

m13v0995
AG 2
IQB-Link

2024

☐

Die Punkte $A(1|1|0)$, $B(4|1|0)$, $E(1|1|4)$ und $H(1|7|4)$ sind Eckpunkte des in der Abbildung dargestellten Quaders ABCDEFGH.



a Geben Sie die Koordinaten des Punktes G an. — BE: 1

Der Quader wird parallel zu einer Gerade so verschoben, dass sich der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen im Koordinatenursprung befindet. Dabei entsteht der Quader $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

b Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts H'. — BE: 3

c Geben Sie einen Eckpunkt des Quaders $A'B'C'D'E'F'G'H'$ an, der nur positive Koordinaten hat. — BE: 1

BE gesamt: 5

m13v0934
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Punkte $P(2|0|23)$ und $Q_t(6|t|20)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a Entscheiden Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Gerade PQ_t parallel zur xy-Ebene verläuft. Begründen Sie Ihre Entscheidung. — BE: 2

b Der Koordinatenursprung und die Punkte P und Q_t bilden ein Dreieck. Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die das Dreieck in Q_t einen rechten Winkel hat. — BE: 3

BE gesamt: 5

m13v1050
AG 1
IQB-Link

☐

Betrachtet wird das Quadrat, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Das Quadrat liegt in der x_1x_2-Ebene.
- Ein Eckpunkt liegt im Koordinatenursprung.
- Der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Diagonalen und berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats. — BE: 5

m13v1048
AG 2
IQB-Link

2023

☐

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4|0|0)$ und $B(5|1|b)$ mit einer reellen Zahl b.

a Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt. — BE: 1

b Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt. Ermitteln Sie den Wert von b. — BE: 4

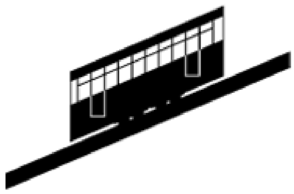
BE gesamt: 5

m13v0998
AG 1
IQB-Link

☐ **BE**

m13v0910
AG 1
IQB-Link

Betrachtet wird ein geradliniger Abschnitt der Strecke der abgebildeten Standseilbahn. In einem Koordinatensystem werden der Anfang und das Ende dieses Abschnitts durch die Punkte $A(-13|9|4)$ bzw. $E(-33|69|34)$ dargestellt, die Talstation der Seilbahn durch den Koordinatenursprung. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 Metern in der Realität.



a Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0;1]$ im Sachzusammenhang an. 1

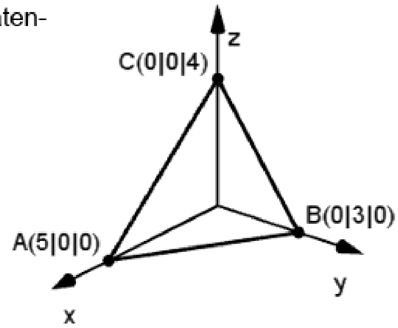
b Ermitteln Sie die Höhe der Seilbahn über der Talstation, wenn die Seilbahn im beschriebenen Streckenabschnitt 140 Meter vom Anfang dieses Abschnitts entfernt ist. 4

5

☐ **BE**

m13v1035
AG 2
IQB-Link

Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.



a Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, kann durch eine Gleichung der Form $12x + 20y + tz = 60$ dargestellt werden. Bestimmen Sie den Wert von t. 1

b Für jeden Wert von k mit $k \in]-3;5[$ wird die Pyramide OA_kB_kC mit $A_k(5-k|0|0)$ und $B_k(0|3+k|0)$ betrachtet. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Pyramide das größte Volumen hat. 4

5

2022

☐ **BE**

m13v0924
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die Ebene $E: 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0$.

a Prüfen Sie, ob der Punkt $(1|1{,}5|7)$ in E liegt. 1

b Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem. 2

c Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl s, für die die Ebene $F: 2 \cdot x + s \cdot y + z = 4$ senkrecht zu E steht. 2

5

☐

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(8|6|0)$ und $C(4|3|z)$, wobei z eine positive reelle Zahl ist.

a Zeigen Sie, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt. — 2 BE

b Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 35. Bestimmen Sie den Wert von z. — 3 BE

BE: 5

m13v1052
AG 1
IQB-Link

☐

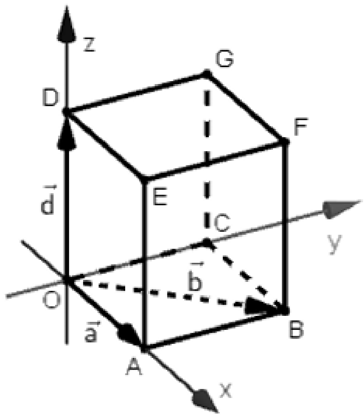
Die Punkte $P(1|1|1)$ und $Q(1|1|3)$ sind benachbarte Eckpunkte eines Quadrats. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 - x_2 = 0$. Berechnen Sie die Koordinaten eines Punkts, der als weiterer Eckpunkt des Quadrats infrage kommt. — 5 BE

m13v1053
AG 2
IQB-Link

2021

☐

Die Abbildung zeigt einen Quader sowie die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und D. Die Grundfläche OABC des Quaders ist quadratisch.



a Beschreiben Sie die Lage des Punkts, zu dem der Ortsvektor $\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ gehört. — 1 BE

Der Punkt P hat den Ortsvektor $\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$.

b Zeichnen Sie P in die Abbildung ein. — 1 BE

c Begründen Sie, dass der Wert des Terms $\vec{b}\circ\overrightarrow{OP}$ nur von der Seitenlänge der Grundfläche abhängt. — 3 BE

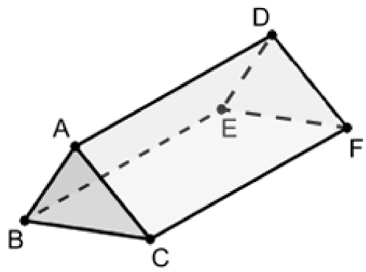
BE: 5

m13v0957
AG 2
IQB-Link

2020

☐

Betrachtet wird das Prisma ABCDEF mit $A(3|3|6)$, $B(-1|5|2)$, $C(7|4|1)$ und $E(2|23|8)$. A, B und C liegen in der Ebene $L: x+6y+2z=33$.



a Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist. — 2 BE

b Die Ebene M ist parallel zu L und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M. — 3 BE

BE: 5

m13v0939
AG 1
IQB-Link

2019

☐

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|2|2)$, $B(4|-1|z_B)$ und $C(-3|y_C|6)$ gegeben.

a B liegt auf der Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Wert von z_B. — 2

b Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt. — 3

5

m13v0932
AG 1
IQB-Link

☐

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem wird das gerade Prisma ABCDEF betrachtet. $A(0|-4|0)$, $B(\sqrt{20}|0|0)$ und $C(0|4|0)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche.

a Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC im Punkt B nicht rechtwinklig ist. — 2

b Der Inhalt der Mantelfläche des Prismas ist 60. Bestimmen Sie die Höhe des Prismas. — 3

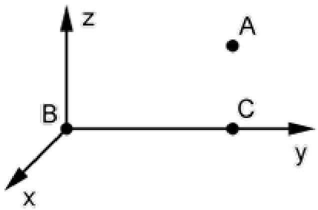
5

m13v0990
AG 1
IQB-Link

☐

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|4|2)$, $B(0|0|0)$ und $C(0|4|0)$ gegeben (vgl. Abbildung). Eine Gerade g verläuft durch A und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



a Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts, der auf g liegt und von A den Abstand 6 hat. — 2

b Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte, die von A, B und C den gleichen Abstand haben. — 3

5

m13v0926
AG 2
IQB-Link

2018

☐

BE

Gegeben sind die Punkte $A(1|1|-1)$, $B(3|-5|2)$ und C. Für die Ortsvektoren von A und C gilt $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$.

a Bestimmen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$. — 2

b Begründen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die A, B und C sowie den Koordinatenursprung enthält. — 3

5

m13v0893
AG 1
IQB-Link

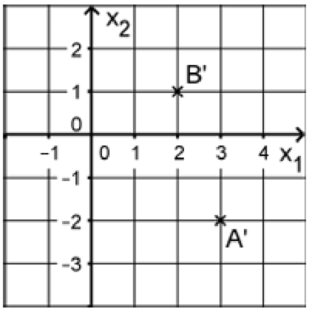
☐

Die Punkte $A(3|-2|1)$, $B(2|1|1)$ und $C(0|-0{,}5|1)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(1|-1{,}5|5)$.

a Begründen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Geben Sie die Höhe der Pyramide an. — 2 BE

b Verschiebt man die Punkte A und B parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene, so ergeben sich die Punkte A' bzw. B', die in der Abbildung dargestellt sind. — 3 BE

Entscheiden Sie mithilfe geeigneter Ergänzung der Abbildung, ob der Fußpunkt der Höhe der Pyramide ABCS innerhalb oder außerhalb ihrer Grundfläche liegt.



BE: 5

m13v0894
AG 1
IQB-Link

☐

Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7|3|0)$, $B(5|3|4)$ und $C_t(5+2t|3|4+t)$ ein Dreieck.

a Zeigen Sie, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat. — 2 BE

b Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind. — 3 BE

BE: 5

m13v0895
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a Zeigen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Dreieck liegt. — 3 BE

b Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig. Ermitteln Sie den Wert von d. — 2 BE

BE: 5

m13v0868
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3|3|4)$, $B(6|7|4)$, $C(2|10|4)$ und $D(-1|6|4)$. Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 4$.

a Weisen Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt. — 2 BE

b Es gibt Punkte S, für die die Pyramide ABCDS das Volumen 50 hat. Bestimmen Sie die z-Koordinate eines dieser Punkte. — 3 BE

BE: 5

m13v0874
AG 1
IQB-Link

☐

	BE
Gegeben sind der Punkt $P(-3\,|\,2\,|\,1)$, die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0\,|\,a\,|\,0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g.	
a Bestimmen Sie den Wert von a.	2
b Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g. Geben Sie alle Wertepaare $(r_1;r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben. Begründen Sie Ihre Angabe.	3
	5

m13v0875
AG 2
IQB-Link

Erhöhtes Niveau

2025

☐

	BE
a Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit jeweils drei Koordinaten. Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob der jeweilige Ausdruck einen Vektor mit drei Koordinaten darstellt, eine Zahl darstellt oder nicht definiert ist.	2

Ausdruck	Vektor mit drei Koordinaten	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{a} + \vec{b})$	☐	☐	☐
$\vec{a} + (\vec{a} \circ \vec{b})$	☐	☐	☐

b Betrachtet wird der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_r} = \begin{pmatrix} r \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. — 3

Ermitteln Sie alle Werte von r, für die dieser Winkel eine Größe von mindestens 90° hat.

BE gesamt: 5

m13v0980
AG 1
IQB-Link

☐

Für jede reelle Zahl k wird die Gerade g_k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5-6k \\ 3k \\ 4-9k \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ betrachtet.

	BE
a Zeigen Sie, dass für keinen Wert von k der Punkt $(0\,|\,0\,|\,0)$ auf g_k liegt.	2
b Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Alle Geraden g_k sind identisch.*	3
	5

m13v0945
AG 2
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Schar der Ebenen E_k: $kx + (2-k) \cdot y = k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

	BE
a Es gibt eine Koordinatenebene, zu der alle Ebenen der Schar senkrecht stehen. Geben Sie diese an.	1
b Zeigen Sie, dass jeweils zwei verschiedene Ebenen der Schar nicht parallel zueinander sind.	4
	5

m13v0985
AG 2
IQB-Link

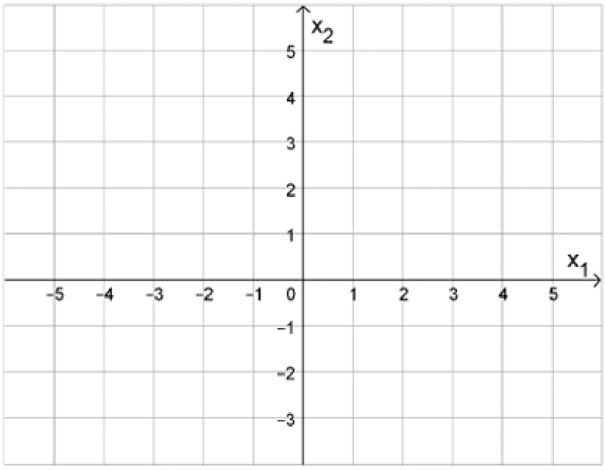
2024

☐

Die Punkte $B(4|3|12)$ und $C(2|4|10)$ sind Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt $M(3|2|1)$ schneiden.

BE

a Verschiebt man jeden der Punkte A, B, C, D und M parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene, so ergeben sich die Punkte A', B', C', D' bzw. M'. Das Viereck $A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Punkt M' schneiden. Zeichnen Sie $A'B'C'D'$ und M' in die Abbildung ein. — 3



b Berechnen Sie den Wert des Skalarprodukts $\overrightarrow{CM} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und beurteilen Sie, ob der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CM}$ und $\overrightarrow{CB}$ kleiner als 90° ist. — 2

5

m13v1004
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Schar der Ebenen $E_a: 2ax_1 - 4x_2 + (a-2) \cdot x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$.

BE

a Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b \in \mathbb{R}$ verläuft. — 2

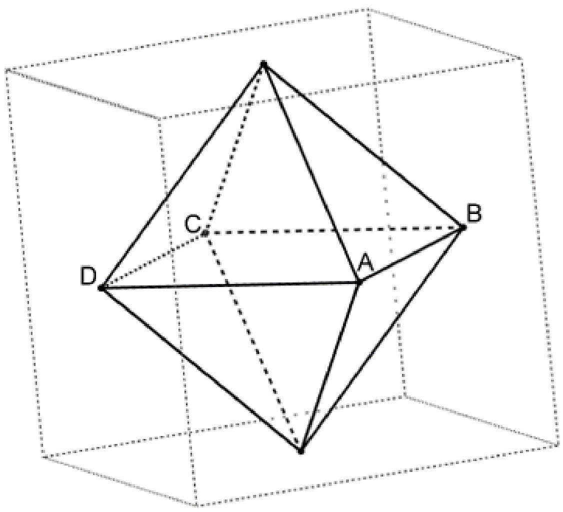
b Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört. — 3

5

m13v0919
AG 1
IQB-Link

☐

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.



BE

a Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt. — 2

b Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen. — 3

5

m13v0996
AG 2
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Schar der Geraden $g_k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

	BE
a Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.	1
b Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften: ♦ Die Punkte $O(0\,\|\,0\,\|\,0)$ und $P(11\,\|\,4\,\|\,5)$ sind Eckpunkte des Quadrats. ♦ Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar. Weisen Sie nach, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.	4
	5

m13v1036
AG 2
IQB-Link

2023

☐

Gegeben sind die Punkte $A(3\,|\,5\,|\,5)$ und $B(1\,|\,1\,|\,1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

	BE
a Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.	1
b Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck ABCD eine Raute ist.	4
	5

m13v0943
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

	BE
a Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 2$ liegt.	2
b Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.	3
	5

m13v1051
AG 1
IQB-Link

2022

☐

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: 3x_1 - x_3 = -2$.

a Begründen Sie, dass g senkrecht zu E steht. (BE: 1)

b Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ hat mit E keinen gemeinsamen Punkt. Es gibt Geraden, die in E liegen und parallel zu h verlaufen. Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von h den kleinsten Abstand hat. (BE: 4)

BE gesamt: 5

m13v0906
AG 1
IQB-Link

☐

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (BE: 3)

b Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R. (BE: 2)

BE gesamt: 5

m13v1002
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Punkte $A(-5|5|-3)$ und $B(-1|1|-1)$. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$ an und bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, die parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft. (BE: 5)

m13v1022
AG 1
IQB-Link

2021

☐

Gegeben sind der Punkt $P(-1|7|2)$ und die Ebene $E: x_1 + 3x_2 = 0$.

a Zeigen Sie, dass P nicht in E liegt. (BE: 1)

b Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn P an E gespiegelt wird. (BE: 4)

BE gesamt: 5

m13v0988
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Punkte $A(2|-3|1)$ und $B(2|3|1)$.

a Begründen Sie, dass die Gerade durch A und B parallel zur y-Achse verläuft. (BE: 1)

b Der Punkt C liegt auf der y-Achse. Die Gerade durch A und C steht senkrecht zur Gerade durch B und C. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts C haben. (BE: 4)

BE gesamt: 5

m13v1015
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Betrachtet werden die Ebene $E: x_1 - x_2 + x_3 - 3 = 0$ und für $a \in \mathbb{R}$ die Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Gerade g_a senkrecht zu E steht. 2

b Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den die Gerade g_a in E liegt. 3

5

m13v1049
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|4|1)$, $C(1|7|3)$ und $D(-2|3|2)$.

a Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. 1

b Der Punkt T liegt auf der Strecke $\overline{AC}$. Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke $\overline{AT}$ zur Länge der Strecke $\overline{CT}$. 4

5

m13v0955
AG 2
IQB-Link

2020

☐

BE

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. 2

b Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T. 3

5

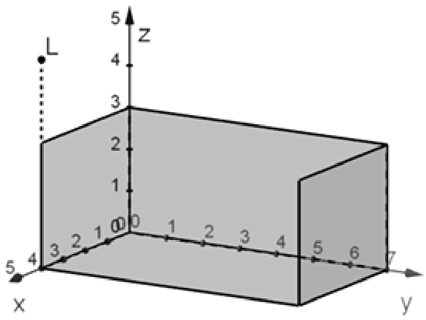
m13v1014
AG 1
IQB-Link

☐

BE

5

Die Abbildung zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7 m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der xz-Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4|0|5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt $S(1|6|2)$.



Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

m13v0927
AG 1
IQB-Link

2019

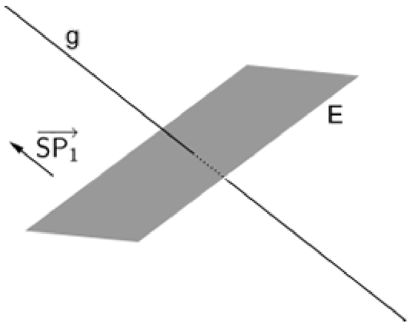
☐

Die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E\colon\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$ schneiden sich im Punkt S.

BE

a Berechnen Sie die Koordinaten von S. 3

b Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$. Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein. 2



5

m13v0992
AG 1
IQB-Link

☐

BE

a Die Ebene $E\colon\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten. 2

b Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 3

Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

5

m13v0947
AG 2
IQB-Link

2018

☐

Für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bilden die Punkte $A(7|3|0)$, $B(5|3|4)$ und $C_t(5+2t|3|4+t)$ ein Dreieck.

BE

a Zeigen Sie, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat. 2

b Bestimmen Sie alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind. 3

5

m13v0886
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

BE

a Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen. 2

b Die Ebene E enthält die Geraden g und h. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

5

m13v0887
AG 1
IQB-Link

☐

Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz-Ebene liegt. — 2 BE

b Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0|8|4)$ in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind. — 3 BE

BE: 5

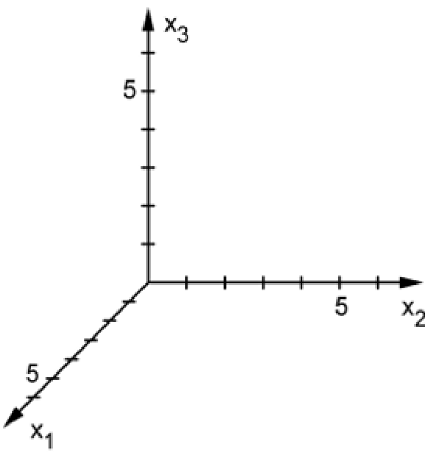
m13v0922
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a Zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittgerade von E mit der x_2x_3-Ebene ein. — 2 BE



b Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g. — 3 BE

BE: 5

m13v0876
AG 1
IQB-Link

☐

Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

a Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt. — 2 BE

b Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 25 ist. — 3 BE

BE: 5

m13v0879
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. — 2 BE

b Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist. — 3 BE

BE: 5

m13v0881
AG 2
IQB-Link

Lineare Algebra

Grundlegendes Niveau

2025

☐

	BE
Betrachtet werden die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0{,}5 & 1-a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.	5
Untersuchen Sie, ob es Werte von a und b gibt, sodass $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ gilt.	

m13v0911
AG 1
IQB-Link

☐

	BE
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:	
$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - y - 2z = 11 \\ \text{II} & x \quad\;\; + 4z = -6 \end{array}$	
a Weisen Sie nach, dass $x = 2$, $y = -3$, $z = -2$ eine Lösung dieses Gleichungssystems ist.	1
b Das Gleichungssystem wird durch eine weitere Gleichung ergänzt:	4
$\text{III} \quad 3x - y + 2z = a$	
Beurteilen Sie die folgende Aussage:	
Es gibt einen reellen Wert von a, für den das aus I, II und III bestehende Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.	
	5

m13v0976
AG 2
IQB-Link

2024

☐

	BE
Ein Produktionsprozess, in dem die Rohstoffe R_1 und R_2 zu den Endprodukten E_1 und E_2 verarbeitet werden, wird durch die Gleichung $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 6 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ beschrieben.	
Dabei geben die Einträge der Vektoren die Anzahlen der Mengeneinheiten der Rohstoffe bzw. der Endprodukte an, beispielsweise r_1 die Anzahl der Mengeneinheiten von R_1.	
a Stellen Sie den Produktionsprozess in einem beschrifteten Verflechtungsdiagramm dar.	2
b Von E_1 werden doppelt so viele Mengeneinheiten produziert wie von E_2. Außerdem ist die Anzahl der eingesetzten Mengeneinheiten des Rohstoffs R_1 viermal so groß wie die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten von E_1.	3
Ermitteln Sie den Wert von x.	
	5

m13v0961
AG 1
IQB-Link

2023

☐

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & 3x & - & y & = & 4 \\ \text{II} & -3x & - & 15y & = & 12 \end{array}$$

a Begründen Sie, dass das Gleichungssystem nur die Lösung $x = 1$ und $y = -1$ hat. 2

b Das gegebene Gleichungssystem wird um die folgende Gleichung mit $t \in \mathbb{R}$ erweitert: 3

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{III} & -2x & + & y & = & t \end{array}$$

Geben Sie die Anzahl der Lösungen des erweiterten Gleichungssystems in Abhängigkeit von t an. Begründen Sie ihre Angabe.

BE: 5

m13v1040
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a Entscheiden Sie, ob es einen Vektor $\vec{u}$ gibt, für den $M \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

b Untersuchen Sie, für welche reellen Werte von a, b und c mit $c \neq 0$ die Vektoren $\vec{v} = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ kollinear sind. 3

BE: 5

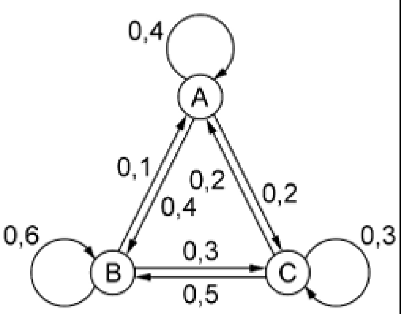
m13v0918
AG 1
IQB-Link

2022

☐

BE

Die drei Stromanbieter A, B und C konkurrieren in derselben Stadt um Kunden. Die Kunden können ihre Verträge zum Ende jedes Quartals kündigen. Das abgebildete Diagramm beschreibt die Wechsel der Kunden zwischen den drei Stromanbietern von einem Quartal zum nächsten. Diese Wechsel können mithilfe einer Matrix M durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschrieben werden, wobei die Einträge des Vektors $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Kunden des Anbieters A, B bzw. C im n-ten Quartal sind.



a Eine der beiden Darstellungen I und II stimmt für passende Werte von x und y mit der Matrix M überein. Geben Sie diese Darstellung sowie die Werte von x und y an. 2

$$\text{I} \quad \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & x \\ 0{,}2 & y & 0{,}3 \end{pmatrix} \qquad \text{II} \quad \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & x \\ 0{,}2 & y & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

b Berechnen Sie den Eintrag der ersten Zeile und ersten Spalte der Matrix M^2. Beschreiben Sie die Bedeutung der dritten Zeile der Matrix M^2 im Sachzusammenhang. 3

5

m13v0925
AG 1
IQB-Link

2021

☐

BE

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & -x & + & y & = & -3 \\ \text{II} & 2x & - & 2y & = & 6 \end{array}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ hat unendlich viele Lösungen.

a Stellen Sie diese Lösungen in einem Koordinatensystem grafisch dar. Geben Sie die Lösung mit $y = 1$ an. 3

b Im gegebenen Gleichungssystem wird die Gleichung II durch die folgende Gleichung mit $a, b \in \mathbb{R}$ ersetzt: 2

$$\text{II*} \quad a \cdot x \; - \; 3y \; = \; b$$

Geben Sie einen Wert von a und einen Wert von b an, für die das aus I und II* bestehende Gleichungssystem keine Lösung hat. Begründen Sie ihre Angabe.

5

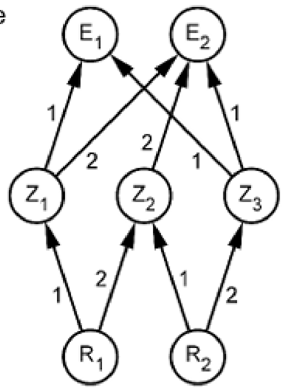
m13v1044
AG 1
IQB-Link

☐

BE

m13v0954
AG 1
IQB-Link

Aus den Rohstoffen R_1 und R_2 werden die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die Abbildung gibt, jeweils in Mengeneinheiten, für jedes Zwischenprodukt den Bedarf an Rohstoffen und für jedes Endprodukt den Bedarf an Zwischenprodukten an.



Für den Produktionsprozess gilt $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}$. Dabei gibt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Rohstoffe und der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Endprodukte an.

a Der Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ stellt die Anzahlen der Mengeneinheiten der Zwischenprodukte dar. Geben Sie die Matrix M an, für die $\vec{z} = M \cdot \vec{e}$ gilt. 2

b Bei der Herstellung von E_1 und E_2 werden 28 Mengeneinheiten von R_1 und 40 Mengeneinheiten von R_2 verbraucht. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten von E_1 und E_2 jeweils hergestellt wurden. 3

5

2020

☐

BE

m13v0959
AG 1
IQB-Link

Eine quadratische Matrix, bei der in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag 1 ist und die anderen Einträge 0 sind, heißt Vertauschungsmatrix. Multipliziert man eine solche Matrix mit einem Vektor, so hat der resultierende Vektor die gleichen Einträge wie der ursprüngliche Vektor, allerdings im Allgemeinen in anderer Reihenfolge.

Gegeben sind die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a Berechnen Sie für M und $\vec{v}$ den aus der Multiplikation resultierenden Vektor. 1

b Geben Sie die inverse Matrix zu M an. 2

c Beschreiben Sie den Aufbau aller Vertauschungsmatrizen N (mit drei Zeilen und drei Spalten), die folgende Bedingung erfüllen: Multipliziert man N mit $\vec{v}$, so sind im resultierenden Vektor im Vergleich zu $\vec{v}$ genau zwei Einträge vertauscht. 2

5

BE

m13v1041
AG 1
IQB-Link

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a Die Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ ist die inverse Matrix zu A. Geben Sie die Werte von a, b und c an. — 2

b Es gibt Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für die $A \cdot \vec{v} = \vec{v}$ gilt. Ermitteln Sie einen dieser Vektoren. — 3

5

BE

m13v1046
AG 2
IQB-Link

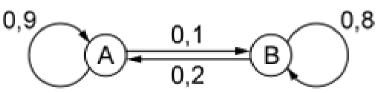
Betrachtet wird $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Zahlentupel $(a;b;c;d)$ mit ganzzahligen Werten von a, b, c und d, für die $M \cdot M = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ gilt. — 5

2019

BE

m13v0978
AG 1
IQB-Link

Vögel einer bestimmten Art brüten einmal pro Jahr in einem der beiden Brutgebiete A und B. Das abgebildete Übergangsdiagramm zeigt die Änderung der Verteilung der Vögel auf die beiden Brutgebiete von einem Jahr zum nächsten.



a Stellen Sie diese Änderung der Verteilung durch eine Gleichung unter Verwendung einer Matrix dar. Geben Sie die Bedeutung aller in der Gleichung auftretenden Variablen an. — 3

b In einem Jahr brüten alle Vögel im Gebiet A. Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Vögel, die dort zwei Jahre später brüten. — 2

5

☐

Betrachtet wird eine Population von Käfern in ihren unterschiedlichen Entwicklungsstadien. Zusammensetzungen der Population werden durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ K \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei E die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven und K die Anzahl der voll entwickelten Käfer ist. Die Entwicklung der Population von einem Monat zum nächsten wird durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben.

	BE
a Geben Sie die Matrix M^2 an.	1
b Es gilt $M^3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{8} \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. Beschreiben Sie in Abhängigkeit von a, wie sich die Population langfristig entwickelt.	4
	5

m13v1045
AG 2
IQB-Link

2018

☐

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

	BE
a Betrachtet wird außerdem eine Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d so, dass $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.	3
b Für eine Matrix C kann das Produkt $C \cdot A$, nicht jedoch das Produkt $A \cdot C$ gebildet werden. Beschreiben Sie alle möglichen Formen von C.	2
	5

m13v0885
AG 1
IQB-Link

☐

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Tiere werden in ihrem ersten Lebensjahr als Jungtiere bezeichnet, im zweiten als heranwachsende Tiere und ab dem dritten als erwachsene Tiere.

Die Zusammensetzung der Population kann durch einen Vektor $\begin{pmatrix} J \\ H \\ E \end{pmatrix}$ dargestellt werden, wobei J die Anzahl der Jungtiere, H die Anzahl der heranwachsenden Tiere und E die Anzahl der erwachsenen Tiere bezeichnet. Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich durch die Matrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = P \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschreiben.

	BE
a Geben Sie an, wieviel Prozent der Jungtiere das erste Lebensjahr nicht überleben.	1
b Berechnen Sie P^2 und beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $P^2 \cdot \overrightarrow{v_n}$ im Sachzusammenhang.	2
c Es gilt $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.	2
	5

m13v1010
AG 1
IQB-Lin k

☐

	BE
a Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt: $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3+3b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Die Gleichung $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ ist nur für einen Wert von b erfüllt. Bestimmen Sie diesen Wert von b.	3
b Für die 2x2-Matrizen C und D gilt $C \cdot D = -D \cdot C$. Stellen Sie den Term $(C+D)^2$ als Summe dar und vereinfachen Sie diese Summe so weit wie möglich.	2
	5

m13v0963
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

	BE
a Entscheiden Sie für jeden der Terme $A+B$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.	2
b Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.	3
	5

m13v0870
AG 1
IQB-Link

Erhöhtes Niveau

2025

☐

Gegeben sind der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\a\end{pmatrix}$ mit $a>0$ und die Matrix $M=\begin{pmatrix}0&b\\2&0\end{pmatrix}$ mit $b\in\mathbb{R}$.

	BE
a Bestimmen Sie den Wert von a, sodass $\lvert\vec{v}\rvert=10$.	2
b Ermitteln Sie für $a=5$ den Wert von b, sodass die Vektoren $\vec{v}$ und $M\cdot\vec{v}$ zueinander orthogonal sind.	3
	5

m13v0936
AG 1
IQB-Link

☐

Betrachtet wird das folgende lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I} & x + 2\cdot y & & & = & a \\ \text{II} & -y & + & 4\cdot z & = & 2 \\ \text{III} & & & (4-a^2)\cdot z & = & 2+a \end{array}$$

	BE
a Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems für $a=0$.	2
b Begründen Sie die folgende Aussage: *Es gibt einen Wert von a, für den das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, und es gibt einen Wert von a, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.*	3
	5

m13v0931
AG 2
IQB-Link

2024

☐

Ein Unternehmen produziert aus zwei Rohstoffen drei Zwischenprodukte, aus denen dann zwei Endprodukte hergestellt werden.

Für den Produktionsprozess gilt $\vec{r}=\begin{pmatrix}5&4\\12&10\end{pmatrix}\cdot\vec{e}$ und $\vec{z}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\vec{e}$. Dabei gibt der

Vektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten (ME) der beiden Rohstoffe an, der

Vektor $\vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der drei Zwischenprodukte und der

Vektor $\vec{e}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der beiden Endprodukte.

	BE
a Bestimmen Sie für jeden der beiden Rohstoffe die Anzahl der Mengeneinheiten, die zur Herstellung von 2 ME des ersten und 2 ME des zweiten Endprodukts insgesamt benötigt werden.	1
b Für 1 ME des ersten, 1 ME des zweiten und 1 ME des dritten Zwischenprodukts ist jeweils die gleiche Anzahl von Mengeneinheiten des ersten Rohstoffs erforderlich. Sowohl für 1 ME des ersten als auch für 1 ME des zweiten Zwischenprodukts werden 2 ME des zweiten Rohstoffs benötigt. Bestimmen Sie die Matrix M, für die $\vec{r}=M\cdot\vec{z}$ gilt.	4
	5

m13v1005
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Matrix $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Beschreiben Sie zunächst die Veränderungen, die sich für eine beliebige 3×3-Matrix ergeben, wenn diese von rechts mit M multipliziert wird bzw. wenn diese von links mit M multipliziert wird.

Bestimmen Sie die Werte von $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, so dass für die Matrix

$A=\begin{pmatrix}0&a&2\\b&2c&d\\1&2d-b&c-a\end{pmatrix}$ gilt: $M\cdot A\cdot M=A$

BE 5

m13v1043
AG 2
IQB-Link

2023

☐

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{I} & 2x & & +\ z & = & 0 \\ \text{II} & & -y & +\ 2z & = & 0 \\ \text{III} & & 2y & +\ bz & = & 1 \end{array}$$

mit $x,y,z\in\mathbb{R}$. Untersuchen Sie in Abhängigkeit von b mit $b\in\mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems; geben Sie gegebenenfalls die Lösungen an.

BE 5

m13v0950
AG 1
IQB-Link

2022

☐

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Insekten in einem abgeschlossenen Terrarium. Die Zusammensetzungen der Population werden zunächst durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix}A\\E\\L\end{pmatrix}$ dargestellt. Dabei ist A die Anzahl der ausgewachsenen Insekten, E die Anzahl der Eier und L die Anzahl der Larven. Die Veränderung dieser Anzahlen von einer Woche n zur nächsten wird durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}}=M\cdot\overrightarrow{v_n}$ mit

$M=\begin{pmatrix}0{,}5&0&0{,}3\\30&0&0\\0&0{,}2&0\end{pmatrix}$ beschrieben.

a	Geben Sie die Bedeutung des Eintrags 0,2 der Matrix M im Sachzusammenhang an.	1
b	Im Terrarium sind zu Beginn 30 ausgewachsene Insekten, 10 Eier und eine unbekannte Anzahl von Larven. Eine Woche später hat sich die Anzahl der ausgewachsenen Insekten nicht geändert. Berechnen Sie die Anzahl der Larven, die zu Beginn im Terrarium waren.	2
c	Die Zusammensetzungen der Population sollen nun durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix}E\\L\\A\end{pmatrix}$ und die Veränderung der Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten von einer Woche zur nächsten durch die Gleichung $\overrightarrow{w_{n+1}}=N\cdot\overrightarrow{w_n}$ dargestellt werden. Geben Sie die Matrix N an.	2
		5

BE

m13v0920
AG 1
IQB-Link

2021

☐

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe der Einträge auf derjenigen Diagonale, die von links oben nach rechts unten verläuft. Beispielsweise hat die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ die Spur 5.

Betrachtet wird die Matrix $M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie alle Werte von k, für die M_k und die inverse Matrix von M_k die gleiche Spur haben.

BE 5

m13v1042
AG 1
IQB-Link

☐

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für eine Matrix B gilt $A \cdot B = B \cdot A$. Ermitteln Sie alle Matrizen, die für B infrage kommen, d. h. die angegebene Bedingung erfüllen.

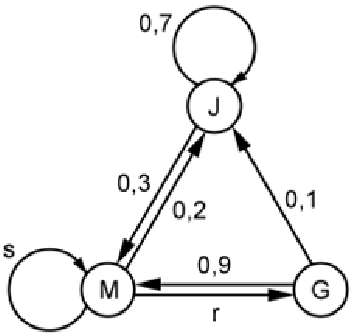
BE 5

m13v0956
AG 2
IQB-Link

2020

☐

Auf einer Apfelplantage stehen Jungbäume, mäßigtragende Bäume und guttragende Bäume. Deren Anzahlen werden mit J, M bzw. G bezeichnet. Das Diagramm beschreibt modellhaft die Veränderung der Anzahlen dieser Bäume von einem Jahr zum nächsten; mäßigtragende und guttragende Bäume werden also teilweise durch Jungbäume ersetzt.



a Beschreiben Sie für die im Diagramm genannten Zahlen 0,1 und 0,9 jeweils die Bedeutung im Sachzusammenhang. — 1

b Die Zusammensetzungen des Baumbestands können durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} J \\ M \\ G \end{pmatrix}$ dargestellt werden. Damit lässt sich die Veränderung der Anzahlen von einem Jahr n zum nächsten im Modell durch eine Matrix A und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschreiben. Es gibt eine Zusammensetzung mit k Jungbäumen, 300 mäßigtragenden Bäumen und 180 guttragenden Bäumen, die sich zum folgenden Jahr nicht verändert. Bestimmen Sie die Werte von r, s und k. — 4

BE 5

m13v0902
AG 1
IQB-Link

☐

Eine quadratische Matrix heißt spaltenstochastisch, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- Alle Einträge der Matrix sind reelle Zahlen, die größer oder gleich null sind.
- Die Summe der Einträge jeder Spalte ist 1.

Zeigen Sie, dass das Quadrat einer spaltenstochastischen Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ebenfalls eine spaltenstochastische Matrix ist.

BE 5

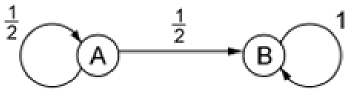
m13v0964
AG 2
IQB-Link

2019

BE

m13v1039
AG 1
IQB-Link

In einem System verteilt sich der Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Zum Zeitpunkt n mit $n \in \mathbb{N}$ wird die Verteilung auf die Zustände A und B durch den Verteilungsvektor $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ beschrieben. Dabei gibt a_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands an, der sich im Zustand A befindet, und b_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands, der sich im Zustand B befindet. Zum Zeitpunkt 0 sind beide Anteile größer als null. Die Abbildung beschreibt die Übergänge zwischen den Zuständen von einem Zeitpunkt zum nächsten.



Die Entwicklung der Verteilung wird durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a Beschreiben Sie mithilfe der Abbildung, wie sich die Verteilung auf lange Sicht entwickelt. 2

b Bestimmen Sie mithilfe des Terms $M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ den kleinsten Wert von n, für den der Anteil des Gesamtbestands, der sich im Zustand A befindet, bis zum Zeitpunkt n auf weniger als 10 % seines Werts zum Zeitpunkt 0 abnimmt. 3

BE

m13v0979
AG 2
IQB-Link

Für jede Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ heißt die Matrix $M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ transponierte Matrix von M. Eine Matrix M heißt orthogonal, wenn $M^T \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

a Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ orthogonal ist. 2

b Untersuchen Sie, ob die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{101}$ orthogonal ist. 3

5

2018

☐

In einem System verteilt sich der Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Zum Zeitpunkt n mit $n \in \mathbb{N}$ wird die Verteilung auf die Zustände A und B durch den Vektor $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ beschrieben. Dabei gibt a_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands an, der sich im Zustand A befindet, und b_n denjenigen Anteil des Gesamtbestands, der sich im Zustand B befindet. Die Tabelle beschreibt die Übergänge zwischen den Zuständen von einem Zeitpunkt zum nächsten.

nach \ von	A	B
A	0,7	0
B	0,3	1

Mithilfe der zugehörigen Übergangsmatrix M kann die Entwicklung der Zustandsverteilung durch $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschrieben werden.

	BE
a Erstellen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.	2
b Für $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ gilt $0 < a_0 < 1$ und $0 < b_0 < 1$. Begründen Sie, dass mit zunehmendem Wert von n eine Koordinate des Vektors $\overrightarrow{v_n}$ kleiner wird, während die andere größer wird.	2
c Geben Sie eine Zustandsverteilung $\vec{v}$ an, für die $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ gilt.	1
	5

m13v0962
AG 1
IQB-Link

☐

In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ordnet jede 2x2-Matrix M einem Punkt $P(a\,|\,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch $M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ einen Bildpunkt $P'(a'\,|\,b')$ zu.

	BE
a Bestimmen Sie für $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Koordinaten von P' in Abhängigkeit von a und b. Begründen Sie, dass die durch diese Matrix beschriebene Zuordnung eine Spiegelung an der y-Achse darstellt.	2
b Durch Spiegelung von P an der x-Achse entsteht der Punkt $P^*\left(a^*\,|\,b^*\right)$. Bestimmen Sie M so, dass P^* der Mittelpunkt der Strecke zwischen dem Koordinatenursprung und P' ist.	3
	5

m13v0967
AG 2
IQB-Link

2017

☐

Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

a Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & & & = & 13 \\ & & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

b Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & & & = & 5 \\ 3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & p\cdot x_3 & = & 4 \end{array}$$

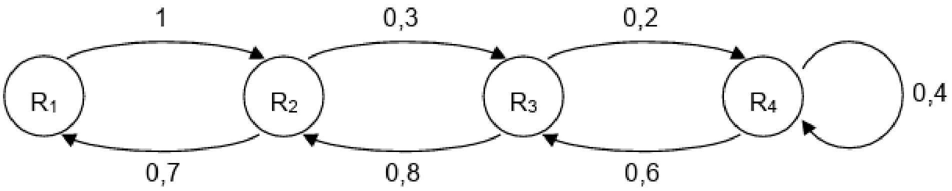
Geben Sie einen Wert von p an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Zeigen Sie, dass es keinen Wert von p gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

BE	
a	2
b	3
	5

m13v0880
AG 1
IQB-Link

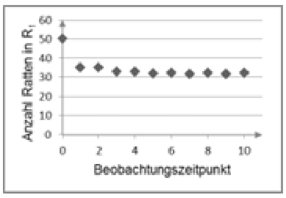
☐

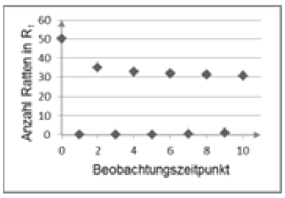
In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen R_1, R_2, R_3 und R_4 beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.

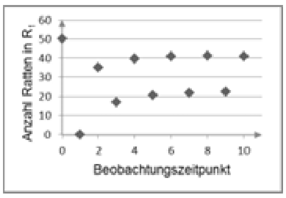


a Geben Sie eine zugehörige Übergangsmatrix an.

b Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R_1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R_1.

I


II


III


Geben Sie an, um welche Abbildung es sich handelt. Begründen Sie Ihre Angabe.

BE	
a	2
b	3
	5

m13v0872
AG 1
IQB-Link

Stochastik

Grundlegendes Niveau

2025

☐

BE

Bei einem Onlinespiel wird einem Spieler zu Beginn des Spiels entweder Startpunkt A oder Startpunkt B zufällig zugewiesen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Spieler Startpunkt A zugewiesen wird, beträgt 40 %. Beginnt der Spieler das Spiel bei Startpunkt A, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er im Spiel auf einen bestimmten Charakter trifft, 80 %. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Spieler Startpunkt B zugewiesen wird und er auf diesen Charakter trifft, beträgt 42 %.

a Erstellen Sie zum beschriebenen Sachverhalt ein beschriftetes Baumdiagramm. 3

b Ein Spieler beginnt das Spiel. Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: 2

$$1-(0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}42)$$

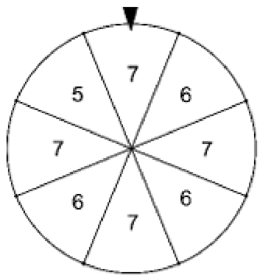
5

m13v0946
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Ein Glücksrad mit acht gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a Interpretieren Sie den Term $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ im Sachzusammenhang. 2

b Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen ungerade ist. 3

5

m13v1019
AG 1
IQB-Link

☐

BE

In einer Schwimmgruppe, zu der 20 Kinder gehören, haben 9 Kinder das Schwimmabzeichen Bronze.

a Zwei Kinder der Schwimmgruppe werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese beiden Kinder das Schwimmabzeichen Bronze haben. 2

b Geben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang an: 3

$$\frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{11}{4}}{\binom{20}{6}}$$

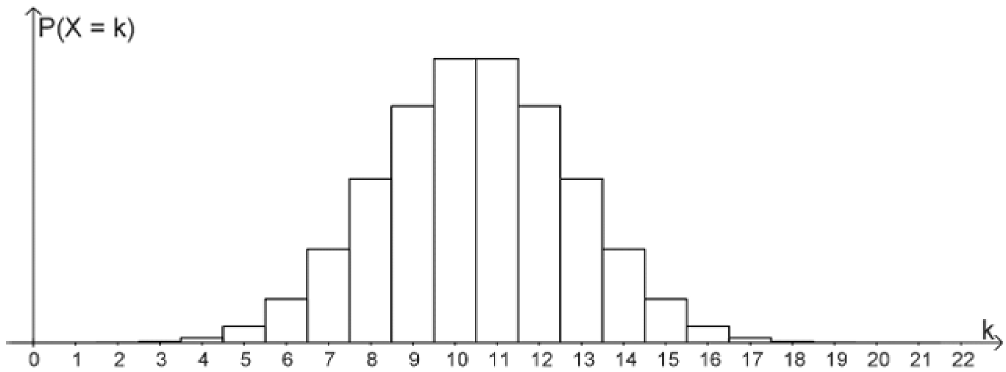
5

m13v1011
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und $p = 0{,}5$.



a Es gilt $P(X = 10) = P(X = 11)$. Begründen Sie, dass n nicht gerade ist. 2

b Es gilt $P(X \geq 9) \approx 0{,}81$ und $P(X = 12) \approx 0{,}14$. 3

Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$.

5

m13v0977
AG 2
IQB-Link

☐

BE

In einem Behälter befinden sich eine schwarze Kugel und w weiße Kugeln, wobei $w \geq 2$.
Für ein Spiel wird aus dem Behälter zweimal nacheinander eine Kugel ohne Zurücklegen zufällig entnommen.

a Geben Sie unter der Annahme, dass $w = 3$ ist, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die schwarze Kugel bereits im ersten Zug entnommen wird. 1

b Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 €. Wird die schwarze Kugel beim ersten Zug entnommen, werden 8 € ausgezahlt, wird sie beim zweiten Zug entnommen, so beträgt die Auszahlung 4 €. Wird bei keinem der beiden Züge die schwarze Kugel entnommen, erfolgt keine Auszahlung. Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. 4
Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von w.

5

m13v1007
AG 2
IQB-Link

2024

☐

BE

In einem Spielwarengeschäft erhält jedes Kind im Rahmen einer Werbeaktion einen kleinen, blickdicht verpackten Ball. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Ball eine Glitzerfärbung hat, beträgt 40 %.

a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von drei Kindern jedes Kind einen Ball mit Glitzerfärbung erhält, kleiner als 10 % ist. 2

b Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $\left(\frac{3}{5}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. 3

5

m13v0951
AG 1
IQB-Link

☐

Auf einer Spendengala wird das folgende Spiel angeboten: Für einen Einsatz von 3 € dreht der Spieler zweimal ein Glücksrad. Dieses besteht aus mehreren gleich großen Sektoren. 10 % der Sektoren sind grün eingefärbt. Für jedes Erzielen eines grünen Sektors werden dem Spieler 10 € ausgezahlt.

	BE
a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel genau einmal einen grünen Sektor zu erzielen, 18 % beträgt.	2
b Begründen Sie, dass der Veranstalter der Spendengala erwarten kann, mit diesem Spiel auf lange Sicht mehr Geld einzunehmen als auszuzahlen.	3
	5

m13v1021
AG 1
IQB-Link

☐

Im hinteren Teil eines Klassenzimmers stehen sechs Stühle in einer Reihe.

	BE
a Es gibt vier Möglichkeiten, drei der sechs Stühle so auszuwählen, dass zwischen je zwei ausgewählten Stühlen mindestens ein weiterer Stuhl steht. Geben Sie diese Möglichkeiten an.	3
b Die Schüler Aaron, Bert und Can sollen sich so auf jeweils einen der sechs Stühle setzen, dass zwischen je zwei Schülern mindestens ein weiterer Stuhl steht. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt.	2
	5

m13v1059
AG 1
IQB-Link

☐

In einem Betrieb werden Geräte hergestellt, von denen jedes mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % fehlerfrei ist. Bevor ein Gerät in den Verkauf gehen kann, wird es einer Endkontrolle unterzogen. Dabei identifiziert die Endkontrolle ein fehlerfreies Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Dagegen wird ein fehlerhaftes Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % ebenfalls als fehlerfrei eingestuft.

	BE
a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gerät fehlerfrei ist und als fehlerfrei eingestuft wird, $89{,}1\,\%$ beträgt.	2
b Formulieren Sie eine Aussage im Sachzusammenhang, die sich in Verbindung mit der Gleichung $0{,}891 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}896$ aus der Ungleichung $\sum_{k=90}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}896^k \cdot 0{,}104^{100-k} > 0{,}5$ ergibt.	3
	5

m13v0991
AG 2
IQB-Link

☐

BE

m13v1023
AG 2
IQB-Link

Um Jugendliche bei einer Befragung zum sensiblen Thema „Unentschuldigtes Fernbleiben vom Unterricht" dazu zu bewegen, die ihnen gestellte Frage wahrheitsgemäß zu beantworten, wird folgendes Verfahren angewandt:

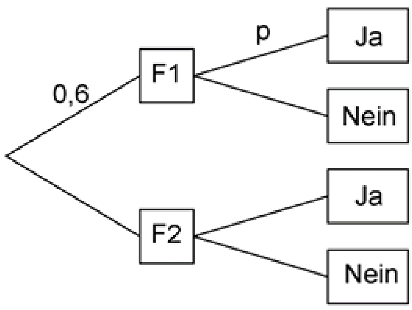
Von den an der Befragung teilnehmenden Jugendlichen erhalten 60 % die folgende Frage F1 und 40 % die folgende Frage F2:

F1: „Ist es wahr, dass du schon einmal unentschuldigt dem Unterricht ferngeblieben bist?"

F2: „Ist es wahr, dass du noch nie unentschuldigt dem Unterricht ferngeblieben bist?"

Nur der befragten Person selbst ist bekannt, welche der beiden Fragen sie erhalten hat. Sie beantwortet die Frage wahrheitsgemäß mit „Ja" bzw. mit „Nein".
Es kann davon ausgegangen werden, dass der Anteil der Befragten, die schon einmal unentschuldigt dem Unterricht ferngeblieben sind, unter denjenigen, die die Frage F1 erhielten, ebenso groß ist wie unter allen Befragten. Dieser Anteil wird mit p bezeichnet.

a Vervollständigen Sie das abgebildete Baumdiagramm, so dass es das beschriebene Verfahren darstellt. 2



b Es werden 1000 Jugendliche befragt. Von diesen antworten 420 mit „Ja". Berechnen Sie den Anteil p, der sich auf Grundlage dieses Ergebnisses ergibt. 3

5

2023

☐

BE

m13v1056
AG 1
IQB-Link

a Der Tabelle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert 3 entnommen werden. 3

x_i	1	3	4	x_4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

Berechnen Sie den Wert von x_4.

b Die Tabelle zeigt einen Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße Y mit dem Erwartungswert 5. 2

y_i	2	...	5	...
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{3}{8}$	...

Zeigen Sie, dass die Standardabweichung von Y größer als 1 ist.

5

☐

BE

Bei einem Spiel werden ein Würfel und eine Münze jeweils einmal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert, die Münze zeigt auf der einen Seite eine Zahl, auf der anderen ein Wappen. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Mit dem Würfel wird eine gerade Zahl erzielt, mit der Münze das Wappen."

B: „Mit dem Würfel wird eine Zahl erzielt, die größer als 3 ist."

a Geben Sie die Ergebnisse an, die zum Ereignis $A \cap B$ gehören. 1

b Jeder Spieler bezahlt zunächst einen festgelegten Einsatz und wirft anschließend Würfel und Münze jeweils einmal. Wenn das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, werden dem Spieler 6 Euro ausgezahlt. Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe des Einsatzes. 4

5

m13v0993
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Bei einem Spiel werfen ein Spieler A und ein Spieler B jeweils einmal ein regelmäßiges Tetraeder, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 4 durchnummeriert sind. Ist die vom Spieler B erzielte Zahl um mindestens 2 größer als die vom Spieler A erzielte, so zahlt der Spieler A den Betrag x an den Spieler B aus. Erzielen beide Spieler die gleiche Zahl, erfolgt keine Zahlung. In allen anderen Fällen zahlt der Spieler B den Betrag y an den Spieler A aus. Bei sehr häufiger Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich die Auszahlungen zwischen den Spielern ausgleichen. Berechnen Sie das Verhältnis von x und y. 5

m13v0958
AG 2
IQB-Link

2022

☐

BE

60 % der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A, 30 % in die Region B, 20 % reisen in jede der beiden Regionen gerne.

a Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. 2

b Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. 3

5

m13v0952
AG 1
IQB-Link

2021

☐

BE

In einer Region beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person Heuschnupfen hat, 15 %. Ein Allergietest ist bei einer Person, die Heuschnupfen hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % positiv. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test bei einer Person positiv ist, obwohl diese Person keinen Heuschnupfen hat, beträgt 2 %.

a Bei einer zufällig ausgewählten Person wird der Allergietest durchgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person keinen Heuschnupfen hat, der Test aber positiv ist. 2

b Deuten Sie den Term $\frac{0{,}15 \cdot 0{,}9}{0{,}15 \cdot 0{,}9 + 0{,}85 \cdot 0{,}02}$ im Sachzusammenhang. 3

5

m13v0941
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Im Folgenden werden zwei Würfel stets gemeinsam geworfen. Bei jedem der beiden Würfel sind die Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a Die beiden Würfel werden einmal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine „6“ auftritt, $\frac{25}{36}$ beträgt. 2

b Die beiden Würfel werden 36-mal geworfen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen keine „6“ auftritt. Begründen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt. 3

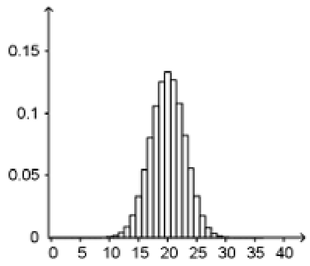


Abb. 1

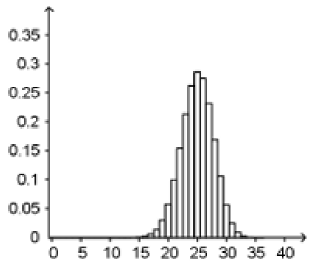


Abb. 2

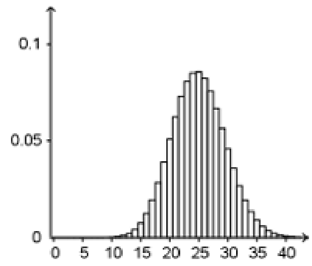


Abb. 3

5

m13v1055
AG 1
IQB-Link

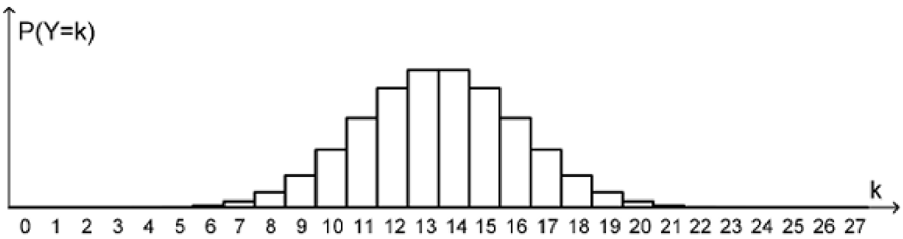
☐

BE

a Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt; die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{4}$. Vervollständigen Sie die folgende Gleichung zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit: 2

$$P\left(X=\quad\right)=\binom{\quad}{3}\cdot\left(\quad\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

b Die Abbildung zeigt die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y. 3



Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitswerte $P(Y \leq 15) \approx 0{,}78$ und $P(Y=12) \approx 0{,}13$. Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Y=14)$.

5

m13v1054
AG 2
IQB-Link

2020

☐

BE

In einem Behälter befinden sich drei blaue und zwei rote Kugeln.

a Zwei Kugeln werden zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln unterschiedliche Farben haben. 2

b Die beiden entnommenen Kugeln werden in den Behälter zurückgelegt. Anschließend entnehmen zwei Spielerinnen dem Behälter abwechselnd jeweils eine Kugel zufällig. Die Spielerin, die zuerst eine rote Kugel entnimmt, gewinnt. Weisen Sie nach, dass diejenige Spielerin, die die erste Kugel entnimmt, einen Vorteil hat. 3

5

m13v0986
AG 1
IQB-Link

☐ BE

An einem Fest nehmen Erwachsene und Jugendliche teil, einige der Gäste sind verkleidet. Unter allen Gästen beträgt der Anteil der verkleideten Erwachsenen 12 %, der Anteil aller Erwachsenen 60 %. Von den Jugendlichen sind 75 % verkleidet.

a Bestimmen Sie den Anteil derjenigen, die nicht verkleidet sind, unter allen Gästen. 3

b Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{0{,}12}{0{,}12+0{,}75\cdot 0{,}4}$ im Sachzusammenhang. 2

5

m13v0997
AG 1
IQB-Link

☐ BE

a Die binomialverteilte Zufallsgröße X_1 hat die Parameter $n_1 = 4$ und p_1 sowie den Erwartungswert 2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 = 4)$. 2

b Die binomialverteilte Zufallsgröße X_2 hat die Parameter n_2 und $p_2 = 0{,}2$. Formulieren Sie dazu eine Aufgabenstellung, die sich mithilfe des Ansatzes $1-0{,}8^{n_2} < 0{,}3$ lösen lässt. 3

5

m13v0903
AG 2
IQB-Link

2019

☐ BE

Ein Chor besteht aus zwölf Frauen und neun Männern; eine der Frauen leitet den Chor. An einer Preisverleihung dürfen zwei Mitglieder des Chors teilnehmen.

a Zunächst geht man davon aus, dass die Leiterin des Chors an der Preisverleihung teilnimmt und das zweite Mitglied zufällig ausgewählt wird. Geben Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist. 1

Da die Leiterin an der Preisverleihung nicht teilnehmen kann, werden zwei der anderen Mitglieder zufällig ausgewählt.

b Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Frauen ausgewählt werden, größer ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Männer ausgewählt werden. 1

c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden. 3

5

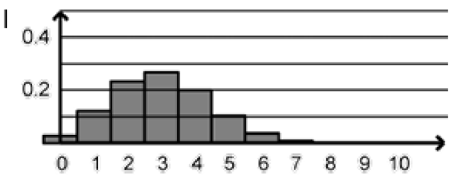
m13v0949
AG 1
IQB-Link

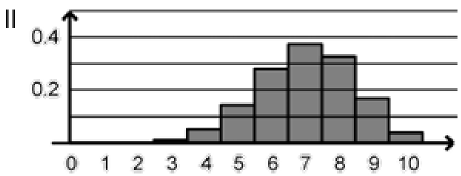
☐ BE

In einer Urne befinden sich drei rote und sieben weiße Kugeln.

a Zweimal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine der entnommenen Kugeln weiß ist. 2

b Zehnmal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen weißen Kugeln. Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass keine der folgenden Abbildungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt. 3





5

m13v0999
AG 1
IQB-Link

☐

Bei einem Spiel gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % einen Zitronenbonbon und mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % einen Orangenbonbon. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man keinen Gewinn erzielt, beträgt 20 %.

BE

a Eine Person nimmt zehnmal an dem Spiel teil. Geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\binom{10}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3$ berechnet werden kann. 1

b Eine andere Person gewinnt sechs Bonbons. Sie wählt zwei dieser Bonbons zufällig aus und verschenkt sie. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie einen Zitronenbonbon und einen Orangenbonbon verschenkt, beträgt $\frac{3}{5}$. Ermitteln Sie, wie viele Orangenbonbons diese Person gewonnen hat. 4

5

m13v1006
AG 2
IQB-Link

2018

☐

Von acht Karten sind zwei mit „1“, zwei mit „2“, zwei mit „3“ und zwei mit „4“ beschriftet. Die Karten werden gemischt und nacheinander verdeckt abgelegt.

BE

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden zuerst abgelegten Karten mit „1“ beschriftet sind. 2

b Die Karten werden nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die dritte aufgedeckte Karte mit einer geraden Zahl beschriftet ist. 3

5

m13v0897
AG 1
IQB-Link

☐

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit „A“ bzw. „B“ beschriftet sind. Für ein Spiel gelten folgende Regeln:

BE

- Die Spielerin bzw. der Spieler setzt einen Betrag von 4 Euro ein und dreht das Glücksrad anschließend zweimal.
- Wird beim ersten Drehen „A“ erzielt, wird der eingesetzte Betrag halbiert, wird „B“ erzielt, wird er verdoppelt.
- Wird beim zweiten Drehen „A“ erzielt, wird der nach dem ersten Drehen bestehende Betrag halbiert, wird „B“ erzielt, wird er verdoppelt.
- Der nach dem zweiten Drehen bestehende Betrag wird der Spielerin bzw. dem Spieler ausgezahlt.

a Zeigen Sie mithilfe der beschriebenen Spielregeln, dass nur die Beträge 1 Euro, 4 Euro und 16 Euro ausgezahlt werden können. 2

b Die Zufallsgröße X gibt den ausgezahlten Betrag in Euro an. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 3

x	1	4	16
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie diesen unter Berücksichtigung des Spieleinsatzes im Sachzusammenhang.

5

m13v0898
AG 1
IQB-Link

☐ | BE | m13v0899 AG 2 IQB-Link

Ein Glücksrad besteht aus einem blauen, einem gelben und einem roten Sektor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen „Rot" erzielt wird, ist $\frac{1}{3}$.

Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zweimal „Gelb" erzielt wird, beträgt $\frac{1}{4}$.

a Ermitteln Sie für den gelben Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels. 2

b Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term 3

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{10}{i}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{i}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{10-i}$$

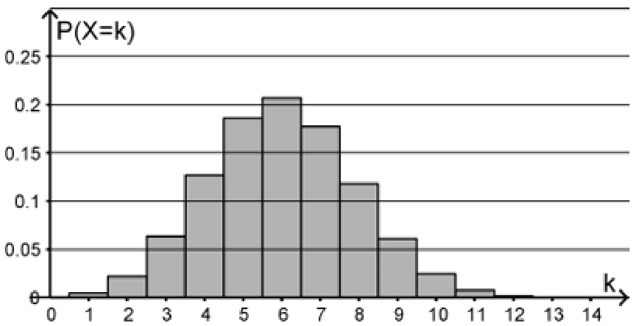
berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

5

2017

☐ | BE | m13v0871 AG 1 IQB-Link

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.



a Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit $P(5 \le X \le 7)$. 2

b X hat den Erwartungswert 6 und die Varianz 3,6. Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p. 3

5

☐ | BE | m13v0873 AG 1 IQB-Link

Für ein zweistufiges Zufallsexperiment werden eine Münze und zwei Würfel verwendet. Beide Würfel sind auf allen sechs Seiten mit jeweils einer Zahl beschriftet, Würfel A mit 1, 2, 3, 4 ,5 und 6, Würfel B mit 1, 1, 2, 2, 3 und 3.

Zunächst wird die Münze geworfen. Zeigt die Münze „Kopf", so wird anschließend Würfel A einmal geworfen, zeigt sie „Zahl", so wird Würfel B einmal geworfen. Die geworfene Zahl wird notiert.

a Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3

b Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewürfelte Zahl gerade ist. 2

5

☐

BE

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

a Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

b Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

5

m13v0877
AG 2
IQB-Link

Erhöhtes Niveau

2025

☐

BE

Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der beiden Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt. 2

b Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt: 3

Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 3 erzielt wird	0	1	2
Auszahlung in Euro	0	5	x

Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x.

5

m13v0901
AG 1
IQB-Link

☐

BE

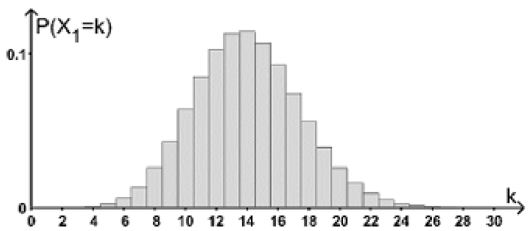


Abb. 1

Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X_1 mit den Parametern n_1 und p_1. Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1.

a Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung: $\sum_{k=16}^{20} P(X_1 = k) > 0{,}5$ 2

Betrachtet wird zudem die binomialverteilte Zufallsgröße X_2 mit den Parametern n_2 und p_2. Abbildung 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2.

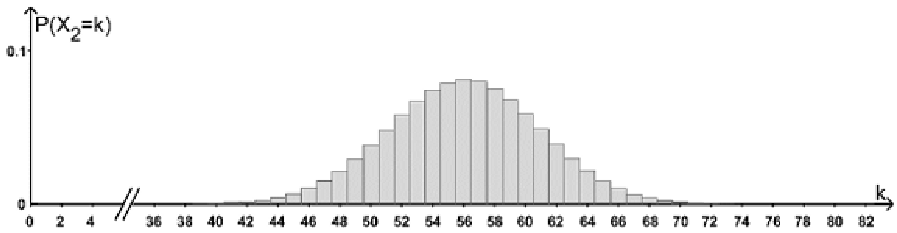


Abb. 2

b Die Erwartungswerte von X_1 und X_2 sind ganzzahlig und es gilt $n_1 = n_2$. Weisen Sie unter Verwendung der Abbildungen 1 und 2 nach, dass $p_2 = 4 \cdot p_1$ gilt. 3

5

m13v1009
AG 1
IQB-Link

☐

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p mit $p<1$.
Es ist bekannt, dass $P(X=1)$ vierzehnmal so groß ist wie $P(X=0)$ und dass der Erwartungswert von X gleich 10 ist. Berechnen Sie die Werte von p und n.

BE: 5

m13v0917
AG 2
IQB-Link

☐

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

a Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X=10)=P(X=15)$ ist. — BE: 2

b Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist.
Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5." — BE: 3

BE gesamt: 5

m13v1047
AG 2
IQB-Link

2024

☐

Betrachtet werden drei Behälter A, B und C mit weißen und schwarzen Kugeln. Die Behälter sind von außen nicht unterscheidbar. Es gilt:

- Im Behälter A befinden sich dreimal so viele weiße wie schwarze Kugeln.
- Im Behälter B befinden sich 12 weiße und 4 schwarze Kugeln.
- Im Behälter C befinden sich 3 schwarze Kugeln und weiße Kugeln, deren Anzahl mit w bezeichnet wird.

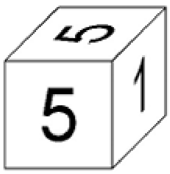
Bei einem Spiel wird einer der drei Behälter zufällig ausgewählt und anschließend daraus eine Kugel zufällig gezogen. Ist bei diesem Spiel die gezogene Kugel schwarz, kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Behälter C ausgewählt wurde, mit dem Term $\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}$ berechnet werden. Weisen Sie dies nach und berechnen Sie w, wenn die beschriebene Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{5}$ hat.

BE: 5

m13v0921
AG 2
IQB-Link

☐

Die drei nicht sichtbaren Seiten des abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.



Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.

BE: 5

m13v0972
AG 2
IQB-Link

2023

☐

BE

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a. Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. 1

b Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a. 4

5

m13v0907
AG 1
IQB-Link

☐

BE

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p. Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

a Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 2

b Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig: 3

E: „Beim ersten Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.“

G: „Die Person gewinnt das Spiel.“

Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

5

m13v1037
AG 1
IQB-Link

☐

BE

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

a Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt. 2

b Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind. 3

5

m13v1060
AG 2
IQB-Link

2022

☐

BE

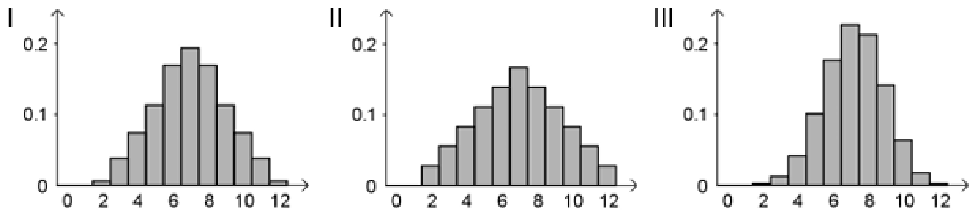
m13v0933
AG 2
IQB-Link

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt. 2

b Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 3



5

2021

☐

BE

m13v1008
AG 1
IQB-Link

Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $p \neq 0$.

	B	$\overline{B}$	
A	p		$3p$
$\overline{A}$			$1-3p$
	$4p$		

a Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Zeigen Sie, dass p nicht den Wert $\frac{1}{5}$ haben kann. 3

b Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p. 2

5

☐

BE

m13v0960
AG 1
IQB-Link

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n=100$ und p. Der Erwartungswert von X ist 50.

a Berechnen Sie die Standardabweichung von X. 3

b Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 61)$ beträgt etwa 2 %. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$. 2

5

2020

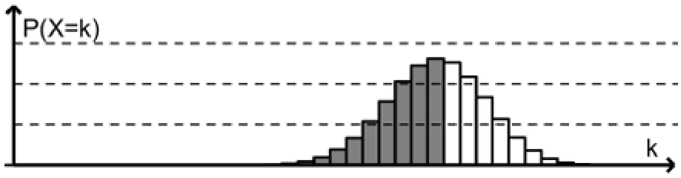
☐ BE

m13v0923
AG 1
IQB-Link

Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen X und Y. X hat die Parameter $n = 40$ und $p_X = 0{,}65$.

a Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(X = 30)$ berechnet werden kann. 1

b Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 2



Für einen Wert von k stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ dar. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

c Die Zufallsgröße Y hat ebenfalls den Parameter $n = 40$. Geben Sie alle Werte von p_Y mit $0 < p_Y < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 10)$ größer ist als die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 30)$. 2

5

☐ BE

m13v1061
AG 1
IQB-Link

Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt.

Zu Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 Euro geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt. 2

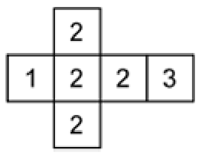
b Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung. 3

5

☐ BE

m13v1038
AG 1
IQB-Link

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



a Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist. 2

b Die Zahlen „1“ und „3“ werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls $1:3$. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen. 3

5

☐

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

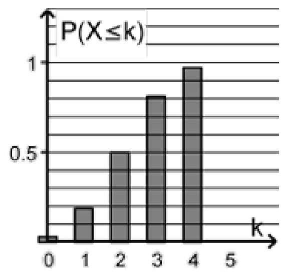
	BE
a Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschieden Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2} \cdot 14$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.	2
b In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.	3
	5

m13v1058
AG 2
IQB-Link

2019

☐

	BE
a Die Abbildung zeigt kumulierte Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit dem Parameter $n = 5$. Zeichnen Sie in die Abbildung den zu $k = 5$ gehörenden Wert ein und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert 2 annimmt.	2
b Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 5$ und $p > 0$. Es gilt $P(Y = 4) = 10 \cdot P(Y = 5)$. Berechnen Sie den Wert von p.	3
	5



m13v1057
AG 1
IQB-Link

☐

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

	BE
a Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.	2
b Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.	3
	5

m13v0948
AG 1
IQB-Link

☐

Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

	BE
a Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.	1
b Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n.	4
	5

m13v0983
AG 2
IQB-Link

2018

☐ **BE**

a Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar. 3

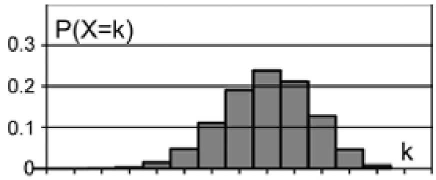


Abb. 1

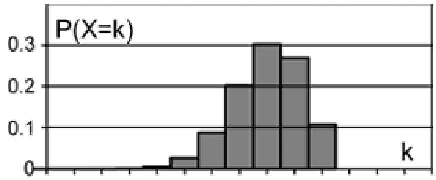


Abb. 2

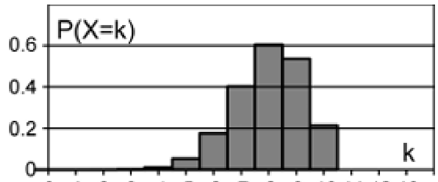


Abb. 3

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p. Es gilt: 2

- Der Erwartungswert von Y ist 8.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

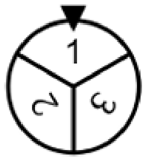
Ermitteln Sie den Wert von n.

5

m13v0891
AG 1
IQB-Link

☐ **BE**

Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte. 2

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

b Betrachtet werden die Ereignisse A und B: 3

A: „Es wird $(1;3)$, $(2;2)$ oder $(3;1)$ erzielt.“

B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt.“

Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

5

m13v0900
AG 1
IQB-Link

☐ | BE | **m13v0892** AG 2 IQB-Link

Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X=3)=\frac{1}{3}$ und $P(X=4)=\frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. 2

b Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y=3)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)\geq\frac{1}{6}$ und $P(Y=5)\geq\frac{1}{6}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen. 3

5

2017

☐ | BE | **m13v0878** AG 1 IQB-Link

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang. 2

b Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird. 1

c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein." Beurteilen Sie die Aussage von Felix. 2

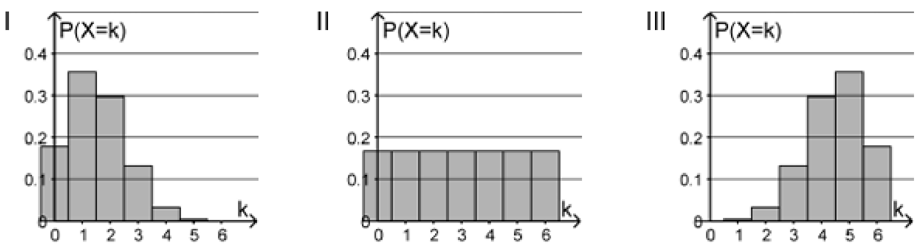
5

☐ | BE | **m13v0882** AG 1 IQB-Link

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist. 2

b Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar: 3



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

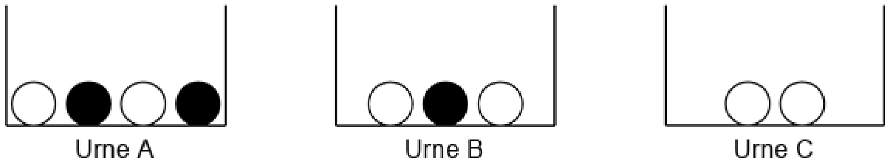
5

☐

m13v0883
AG 2
IQB-Link

BE

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



a Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden. 2

b Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel: 3

> *Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.*

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

5